

# Hydrodynamique de l'annihilation balistique probabiliste

François Coppex

Février 2004

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Equations de Boltzmann et de bilan</b>	<b>4</b>
2.1	Equation de Boltzmann	4
2.2	Equations de bilan	6
2.2.1	Masse	7
2.2.2	Impulsion	7
2.2.3	Energie	8
2.3	Résumé	11
<b>3</b>	<b>Solution de Chapman-Enskog</b>	<b>12</b>
3.1	Ordre zéro	13
3.2	Ordre un	14
3.2.1	Equations de bilan	14
3.2.1.1	Masse	14
3.2.1.2	Impulsion	15
3.2.1.3	Energie	15
3.2.2	Equation de Boltzmann et gradients	15
3.2.2.1	Reformulation du membre de droite de (59)	15
3.2.2.2	Reformulation du membre de gauche de (59)	18
3.2.2.3	Equation de Boltzmann	20
3.2.3	Résumé	20
3.2.4	Simplifications	21
3.2.4.1	Dépendance fonctionnelle des taux de déclin dans les champs	21
3.2.4.2	Symétries	22
3.2.5	Résumé	22
3.2.6	Conditions de solubilité	22
3.3	Coefficients de transport	23
3.3.1	Equations intégrales	24
3.3.1.1	Pression	24
3.3.1.2	Courant de chaleur	27
3.3.2	Développement en polynômes de Sonine : taux de déclin à l'ordre 0	36
3.3.2.1	Taux de déclin de densité $\xi_n^{(0)}$	37
3.3.2.2	Taux de déclin de l'énergie $\xi_T^{(0)}$	39
3.3.3	Développement en polynômes de Sonine : distribution $f^{(1)}$	40
3.3.4	Développement en polynômes de Sonine : coefficients de transport	41
3.3.4.1	Calcul de $L_a$ avec $X = Y = S_i(\mathbf{V}) : \nu_\kappa^*, \nu_\mu^*$	45
3.3.4.2	Calcul de $L_a$ avec $X = Y = D_{ij}(\mathbf{V}) : \nu_\eta^*$	54
3.3.4.3	Calcul de $L_c$ avec $X = Y = D_{ij}(\mathbf{V}) : \nu_\eta^*$	56
3.3.4.4	Calcul de $L_c$ avec $X = Y = S_i(\mathbf{V}) : \nu_\kappa^*, \nu_\mu^*$	64

3.3.4.5	Calcul de la seconde intégrale pour $\nu_\kappa^*$ et $\nu_\mu^*$ . . . . .	65
3.3.4.6	Calcul de la seconde intégrale pour $\nu_\eta^*$ . . . . .	67
3.3.4.7	Coefficients de transport . . . . .	69
3.3.5	La distribution $f^{(1)}$ . . . . .	70
3.4	Ordre deux . . . . .	71
3.5	Résumé . . . . .	72
3.6	Taux de déclin au premier ordre . . . . .	73
3.6.1	Démarche générale . . . . .	73
3.6.2	Relations intermédiaires . . . . .	81
3.6.3	Calcul des intégrales . . . . .	86
3.6.3.1	Première intégrale . . . . .	86
3.6.3.2	Seconde intégrale . . . . .	87
3.6.3.3	Troisième intégrale . . . . .	87
3.6.3.4	Quatrième intégrale . . . . .	87
3.6.3.5	Cinquième intégrale . . . . .	88
3.6.4	Taux de déclin $\xi_n^{(1)}$ , $\xi_{u_i}^{(1)}$ , $\xi_T^{(1)}$ . . . . .	88
<b>4</b>	<b>Stabilité hydrodynamique</b> . . . . .	<b>90</b>
4.1	Solution homogène . . . . .	90
4.2	Nouvelles variables et transformée de Fourier . . . . .	92
4.3	Linéarisation . . . . .	93
4.3.1	Densité . . . . .	93
4.3.2	Impulsion . . . . .	95
4.3.3	Energie . . . . .	100
4.4	Résolution . . . . .	102
4.5	Interprétations . . . . .	103
	<b>Références</b> . . . . .	<b>104</b>

### Résumé

Le but de ce document est de présenter *en détail*, c'est-à-dire avec tous les calculs explicites (au risque d'être parfois un peu redondant), le travail sur la stabilité de l'hydrodynamique de l'annihilation probabiliste. Il s'agit donc d'un outil de travail remplaçant les notes manuscrites. La présentation étant très détaillée, il peut être nécessaire de suivre en parallèle [1] (ou [2]) pour avoir une vue d'ensemble. Les Refs. [3, 4] fournissent une discussion instructive de plusieurs aspects théoriques reliés à ce travail (gaz élastique), ainsi qu'une multitude de références pertinentes. Ce document a donné lieu à une publication [1].

# 1 Introduction

Soit un système de sphères dures en dimension  $d$ , soit des collisions binaires entre ces sphères. On suppose que lors d'une telle collision, les deux particules s'annihilent avec probabilité  $p$  et subissent un choc élastique avec probabilité  $1 - p$ . Le mouvement est balistique entre les collisions. On sait que pour l'annihilation pure  $p = 1$  l'équation de Boltzmann devient exacte dans la limite des temps longs en dimension  $d \geq 2$ . En effet, on peut le comprendre intuitivement en constatant que pour des temps longs la densité de particules tend vers zéro, et par conséquent la fraction d'empilement (rapport de l'espace occupé par les particules sur l'espace total du système) devient très petite. Ainsi les recollisions sont moins fréquentes permettant de justifier le chaos moléculaire. En d'autres termes que la fraction d'empilement, la justification du chaos moléculaire se comprend en constatant qu'aux temps longs le rapport du libre parcours moyen sur la taille linéaire des particules devient petit. Plus formellement, Piasecki et al. [5] montrent que la hiérarchie des fonctions de distribution des particules se réduit dans la limite de Graad, qui apparaît ici comme une conséquence de la dynamique aux temps longs, à l'équation de Boltzmann. Dans le cas du gaz élastique sans annihilation, la hiérarchie ne se réduit pas formellement à une équation de Boltzmann et donc la dynamique ne peut pas a priori être décrite par cette équation. Néanmoins, dans le cas de l'annihilation probabiliste où on tient compte des deux dynamiques d'annihilation et de collisions élastiques, on conjecture qu'aussi longtemps que  $p > 0$  il suffit d'attendre assez longtemps pour que le processus de décimation des particules rende la description de Boltzmann formellement correcte. Ainsi,  $p$  apparaît en quelque sorte comme un paramètre "perturbatif" autour de l'équation de Boltzmann, dans le sens où en un temps fixé les hypothèses menant à l'équation de Boltzmann sont d'autant moins bien vérifiées que  $p$  diminue. Seule la limite  $p \rightarrow 0^+$  apparaît alors a priori délicate du point de vue théorique et conceptuel en ce qui concerne le chaos moléculaire. D'un autre point de vue, la description hydrodynamique pour  $p$  proche de l'unité peut se révéler inadéquate. En effet, l'échelle de temps associée aux taux de déclins peut devenir de l'ordre de l'échelle de temps microscopique. La description hydrodynamique est alors mise en défaut. La discussion de la relevance de cette description s'avère subtile, et contrairement à l'hypothèse du chaos moléculaire qui peut être validée par un système suffisamment dilué ou des temps longs, il est plus difficile d'exercer un contrôle sur la validité de l'hydrodynamique dissipative.

Le but du travail est d'étudier la stabilité des équations hydrodynamiques de l'annihilation probabiliste. Pour ceci, on cherche la solution de Chapman-Enskog de l'équation de Boltzmann jusqu'à un certain ordre. On cherche donc une solution dite normale, qui s'exprime en terme des champs hydrodynamiques  $n$  (densité),  $\mathbf{u}$  (vitesse moyenne locale de l'écoulement), et  $T$  (température). A l'ordre un on obtient les équations de Navier-Stokes (on dit aussi les équations de bilan "à l'ordre Navier-Stokes"), faisant intervenir le flux de chaleur et le tenseur de pression exprimés en terme de la fonction de distribution des particules. En reliant le flux de chaleur et le tenseur de pression à leurs expressions phénoménologiques, on peut identifier et calculer (moyennant quelques approximations) les coefficients de transports. Une difficulté technique est qu'il est nécessaire d'aller à l'ordre suivant, soit l'ordre Burnett, pour collecter toutes les contributions aux coefficients de transport dans les équations à l'ordre Navier-Stokes. Néanmoins, il a été montré que pour  $p = 0$  (pas d'annihilation) ces contributions sont négligeables [2]. L'insertion des coefficients de transport dans les équations de bilan à l'ordre Navier-Stokes fournit les relations permettant d'étudier, par analyse de Fourier, la stabilité des solutions de l'ordre Navier-Stokes.

## 2 Equations de Boltzmann et de bilan

### 2.1 Equation de Boltzmann

L'équation de Boltzmann a la forme (Eq. (25) ref. [5])

$$(\partial_t + \mathbf{v}_1 \cdot \nabla_{\mathbf{r}_1}) f(1; t) = \int d^2 T^\nu(1, 2) f(1; t) f(2; t), \quad (1)$$

avec  $d2 = d\mathbf{r}_2 d\mathbf{v}_2$ ,  $i = \{\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i\}$ , et  $T^\nu(1, 2)$  l'opérateur d'annihilation probabiliste défini par

$$T^\nu(1, 2) = pT_a^\nu(1, 2) + (1-p)T_c^\nu(1, 2) \quad (2)$$

$$T_a^\nu(1, 2) = \sigma^{d-1} \int d\hat{\boldsymbol{\sigma}} (\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{v}_{12}) \theta(-\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{v}}_{12}) \delta(\mathbf{r}_{12} - \sigma\hat{\boldsymbol{\sigma}}) \quad (3)$$

$$T_c^\nu(1, 2) = -\sigma^{d-1} \int d\hat{\boldsymbol{\sigma}} (\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{v}_{12}) \theta(-\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{v}}_{12}) \delta(\mathbf{r}_{12} - \sigma\hat{\boldsymbol{\sigma}}) (b^{-1} - 1), \quad (4)$$

où  $T_a^\nu(1, 2)$  est l'opérateur d'annihilation,  $T_c^\nu(1, 2)$  l'opérateur de collision,  $\hat{\mathbf{r}}_{12} = \mathbf{r}_{12}/|\mathbf{r}_{12}|$ ,  $\sigma$  le diamètre des particules,  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$  un vecteur unité le long de la droite joignant le centre des deux particules lors de la collision, et

$$b^{-1}\mathbf{v}_{12} = \mathbf{v}_{12} - 2(\mathbf{v}_{12} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}})\hat{\boldsymbol{\sigma}} = b\mathbf{v}_{12}, \quad (5)$$

$$b^{-1}\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 \mp (\mathbf{v}_2 \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}})\hat{\boldsymbol{\sigma}} = b\mathbf{v}_2, \quad (6)$$

avec  $\mathbf{v}_{12} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ . (3) et (4) dans (1) donne :

$$\begin{aligned} (\partial_t + \mathbf{v}_1 \cdot \nabla_{\mathbf{r}_1}) f(1; t) &= p \int d2 T_a^\nu(1, 2) f(1; t) f(2; t) + (1-p) \int d2 T_c^\nu(1, 2) f(1; t) f(2; t) \\ &= pJ_a[f, f] + (1-p)J_c[f, f], \end{aligned} \quad (7)$$

avec

$$\begin{aligned} J_c[f, g] &= - \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{r}_2 \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v}_2 \sigma^{d-1} \int d\hat{\boldsymbol{\sigma}} (\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{v}_{12}) \theta(-\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{v}}_{12}) \delta(\mathbf{r}_{12} - \sigma\hat{\boldsymbol{\sigma}}) (b^{-1} - 1) g(1; t) f(2; t) \\ &= -\sigma^{d-1} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v}_2 \int d\hat{\boldsymbol{\sigma}} (\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{v}_{12}) \theta(-\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{v}}_{12}) (b^{-1} - 1) f(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1; t) \times \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{r}_2 f(\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2; t) \underbrace{\delta(\mathbf{r}_{12} - \sigma\hat{\boldsymbol{\sigma}})}_{\substack{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = \sigma \rightarrow 0 \\ \Rightarrow \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 \text{ dans la limite de Graad}}} \\ &= \sigma^{d-1} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v}_2 \int d\hat{\boldsymbol{\sigma}} (\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{v}_{12}) \theta(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{v}}_{12}) (b^{-1} - 1) g(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1; t) f(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_2; t), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} J_a[f, g] &= \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{r}_2 \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v}_2 \sigma^{d-1} \int d\hat{\boldsymbol{\sigma}} (\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{v}_{12}) \theta(-\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{v}}_{12}) \delta(\mathbf{r}_{12} - \sigma\hat{\boldsymbol{\sigma}}) g(1; t) f(2; t) \\ &= -\sigma^{d-1} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v}_2 \int d\hat{\boldsymbol{\sigma}} (\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{v}_{12}) \theta(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{v}}_{12}) g(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1; t) \int d\mathbf{r}_2 f(\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2; t) \delta(\mathbf{r}_{12} - \sigma\hat{\boldsymbol{\sigma}}) \\ &= -\sigma^{d-1} \underbrace{\int d\hat{\boldsymbol{\sigma}} (\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{v}_{12}) \theta(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{v}}_{12})}_{\doteq \beta_1} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v}_2 |\mathbf{v}_{12}| g(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1; t) f(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_2; t) \\ &= -\sigma^{d-1} \underbrace{\beta_1 \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v}_2 |\mathbf{v}_{12}| f(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_2; t) g(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1; t)}_{\doteq \nu(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1; t)} \\ &= -\nu(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1; t) g(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1; t). \end{aligned} \quad (9)$$

$\nu(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1; t)$  est la fréquence de collision dépendante de la position.  $J_c$  est l'opérateur de collision des sphères dures, et  $J_a$  l'opérateur de collision de l'annihilation pure. La grandeur  $\beta_1$  est donnée par la relation générale

$$\beta_n = \int d\hat{\boldsymbol{\sigma}} (\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{v}}_{12})^n \theta(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{v}}_{12}) = \pi^{\frac{d-1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n+d}{2})}. \quad (10)$$

En effet, notant  $\Omega_d = \int d\hat{\boldsymbol{\sigma}} = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$  la surface de la sphère en dimension  $d$  :

$$\begin{aligned}
\beta_n &= \frac{1}{2}\Omega_d \frac{\int d\hat{\boldsymbol{\sigma}} (\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{v}}_{12})^n \theta(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{v}}_{12})}{\frac{1}{2}\Omega_d} \\
&= \frac{1}{2}\Omega_d \frac{\int_0^\pi d\varphi_1 \dots \int_0^\pi d\varphi_{d-2} \int_0^{2\pi} d\psi \prod_{k=1}^{d-2} (\sin \varphi_k)^k \cos(\varphi_{d-2})^n \theta(\cos \varphi_{d-2})}{\int_0^\pi d\varphi_1 \dots \int_0^\pi d\varphi_{d-2} \int_0^{2\pi} d\psi \prod_{k=1}^{d-2} (\sin \varphi_k)^k} \\
&= \frac{1}{2}\Omega_d \frac{\int_0^{\pi/2} d\theta (\sin \theta)^{d-2} (\cos \theta)^n}{\int_0^{\pi/2} d\theta (\sin \theta)^{d-2}} \\
&= \pi^{\frac{d-1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n+d}{2})}. \tag{11}
\end{aligned}$$

L'équation de Boltzmann s'écrit alors :

$$\boxed{(\partial_t + \mathbf{v}_1 \cdot \nabla_{\mathbf{r}_1}) f(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1; t) = pJ_a[f, f] + (1-p)J_c[f, f].} \tag{12}$$

## 2.2 Equations de bilan

Les équations de bilan sont données par l'intégration de l'équation de Boltzmann sur les moments des vitesses  $\mathbf{v}^0, \mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2$ . Comme  $T_c^\nu(1, 2)$  décrit des collisions élastiques, les intégrations sur  $T_c^\nu(1, 2)$  pondérées par les invariants de collision sont nulles. Seule l'annihilation décrite par  $T_a^\nu(1, 2)$  donnera une contribution non nulle, c'est-à-dire des taux de déclin non nuls pour la masse, l'impulsion, et l'énergie cinétique du système. Ainsi, définissons :

$$\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v}_1 v_1^0 J_a[f, f] = - \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v}_1 \nu(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1; t) f(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1; t) = -\omega[f, f] \tag{13}$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v}_1 m \mathbf{v}_1^1 J_a[f, f] = - \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v}_1 m \mathbf{v}_1 \nu(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1; t) f(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1; t) = -m\omega[f, \mathbf{v}_1 f] \tag{14}$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v}_1 \frac{1}{2} m v_1^2 J_a[f, f] = -\frac{1}{2} m \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v}_1 v_1^2 \nu(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1; t) f(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1; t) = -\frac{1}{2} m \omega[f, v_1^2 f], \tag{15}$$

où on a noté

$$\omega[f, g] = \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\mathbf{v}_1 \nu(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1; t) g(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1; t) = \sigma^{d-1} \beta_1 \int d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 |\mathbf{v}_{12}| g(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1; t) f(\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2; t). \tag{16}$$

Le premier argument de la forme bilinéaire  $\omega$  dépend donc de  $\mathbf{v}_2$ , et le second de  $\mathbf{v}_1$ . Dans la suite nous adoptons souvent la notation allégée  $\mathbf{v}_1 \rightarrow \mathbf{v} = (v_1, \dots, v_d)$ , et  $\omega[f, V_i g] = \omega[f(\mathbf{V}_2), (\mathbf{V}_1)_i g(\mathbf{V}_1)]$ .

Les équations de bilan s'obtiennent par intégration de l'équation de Boltzmann avec poids donné par les moments de la vitesse. Pour ceci, introduisons d'abord les grandeurs :

$$n(\mathbf{r}, t) = \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t) : \text{densité de particules} \tag{17}$$

$$n(\mathbf{r}, t) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v} \mathbf{v} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t) \implies \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{n(\mathbf{r}, t)} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v} \mathbf{v} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t) : \text{champ de vitesse} \tag{18}$$

$$\frac{d}{2} n(\mathbf{r}, t) k_B T(\mathbf{r}, t) = \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v} \frac{1}{2} m \mathbf{V}^2 f(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t) \implies T(\mathbf{r}, t) = \frac{m}{n(\mathbf{r}, t) k_B d} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v} \mathbf{V}^2 f(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t) \tag{19}$$

$T(\mathbf{r}, t)$  est donc la température granulaire, et  $\mathbf{V} = \mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  est l'écart au champ moyen de vitesse. On présente les calculs en détail.

### 2.2.1 Masse

$$\begin{aligned}
&\stackrel{(7)}{\implies} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v}_1 (\partial_t + \mathbf{v}_1 \cdot \nabla_{\mathbf{r}_1}) f(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1; t) = p \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v}_1 J_a[f, f]}_{\stackrel{(13)}{=} -\omega[f, f]} + (1-p) \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v}_1 J_c[f, f]}_{=0} \\
&\implies \underbrace{\partial_t \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v}_1 f(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1; t)}_{=n(\mathbf{r}_1, t)} + \underbrace{\nabla_{\mathbf{r}_1} \cdot \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1 f(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1; t)}_{=n(\mathbf{r}_1, t)\mathbf{u}(\mathbf{r}_1, t)} = -p\omega[f, f] \\
&\implies \partial_t n(\mathbf{r}_1, t) + (\nabla_{\mathbf{r}_1} n(\mathbf{r}_1, t)) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}_1, t) + n(\mathbf{r}_1, t) \nabla_{\mathbf{r}_1} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}_1, t) = -p\omega[f, f], \tag{20}
\end{aligned}$$

donc on obtient l'équation de bilan de masse

$$\boxed{\partial_t n(\mathbf{r}_1, t) + \nabla_{\mathbf{r}_1} \cdot (n(\mathbf{r}_1, t)\mathbf{u}(\mathbf{r}_1, t)) = -p\omega[f, f].} \tag{21}$$

### 2.2.2 Impulsion

$$\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v}_1 m\mathbf{v}_1 (\partial_t + \mathbf{v}_1 \cdot \nabla_{\mathbf{r}_1}) f(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1; t) = p \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v}_1 m\mathbf{v}_1 J_a[f, f]}_{\stackrel{(14)}{=} -m\omega[f, \mathbf{v}_1 f]} + (1-p) \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v}_1 m\mathbf{v}_1 J_c[f, f]}_{=0} \tag{22}$$

Dans la suite, on allège l'écriture en omettant d'écrire le domaine d'intégration  $\mathbb{R}^d$  et en écrivant le bilan d'impulsion dans la direction  $i$  :  $\mathbf{v}_1 \rightarrow \mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_d)$ , ainsi :

$$\begin{aligned}
&m \int d\mathbf{v} v_i (\partial_t + v_j \nabla_j) f = -pm\omega[f, v_i f] \\
&\implies \underbrace{\partial_t \int d\mathbf{v} v_i f}_{=nu_i} + \underbrace{\nabla_j \int d\mathbf{v} v_i v_j f}_{\nabla_j \int d\mathbf{v} v_i v_j f} = -p\omega[f, v_i f] \\
&\implies \frac{1}{n} \underbrace{\partial_t (nu_i)}_{=u_i \partial_t n + n \partial_t u_i} + \frac{1}{n} \nabla_j \int d\mathbf{v} v_i v_j f = -p \frac{1}{n} \omega[f, v_i f] \\
&\implies u_i \frac{1}{n} \underbrace{\partial_t n}_{\stackrel{(21)}{=} -p\omega[f, f] - u_j \nabla_j n - n \nabla_j u_j} + \partial_t u_i + \frac{1}{n} \nabla_j \int d\mathbf{v} v_i v_j f = -p \frac{1}{n} \omega[f, v_i f] \\
&\implies \partial_t u_i + \frac{1}{n} \nabla_j \int d\mathbf{v} v_i v_j f - \frac{1}{n} (u_i u_j \nabla_j n + nu_i \nabla_j u_j) = p \frac{1}{n} \underbrace{(u_i \omega[f, f] - \omega[f, v_i f])}_{\substack{= \omega[f, u_i f] - \omega[f, v_i f] \\ = -\omega[f, (v_i - u_i) f] \\ v_i = v_i - u_i \\ \stackrel{V_i}{=} -u_i - \omega[f, V_i f]}}. \tag{23}
\end{aligned}$$

Introduisons le tenseur de pression. Soit  $\beta = 1/k_B T(\mathbf{r}, t)$ , alors le tenseur de pression  $P_{ij}$  est défini par

$$P_{ij} = m \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v} V_i V_j f(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t). \tag{24}$$

On peut décomposer le tenseur de pression en une partie de trace nulle et une autre purement

diagonale comme suit :

$$\begin{aligned}
P_{ij} &= \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t) m \underbrace{\left( V_i V_j - \frac{\mathbf{V}^2}{d} \delta_{ij} \right)}_{\doteq D_{ij}(\mathbf{V})} + \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t) \underbrace{\frac{m}{d} \mathbf{V}^2 \delta_{ij}}_{= n(\mathbf{r}, t) k_B \frac{m}{k_B d} \frac{1}{n(\mathbf{r}, t)} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v} \mathbf{V}^2 f \delta_{ij}}_{= T(\mathbf{r}, t)} \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t) D_{ij}(\mathbf{V}) + \frac{n}{\beta} \delta_{ij}. \tag{25}
\end{aligned}$$

En particulier, nous avons besoin de reformuler la définition générale (24) pour l'inclure dans (23) :

$$\begin{aligned}
P_{ij} &= m \int d\mathbf{v} (v_i - u_i)(v_j - u_j) f \\
&= m \int d\mathbf{v} v_i v_j f + m \underbrace{\int d\mathbf{v} u_i u_j f}_{= n u_i u_j} - m \underbrace{\int d\mathbf{v} v_i u_j f}_{= n u_i u_j} - m \underbrace{\int d\mathbf{v} u_i v_j f}_{= n u_i u_j} \\
&= m \int d\mathbf{v} v_i v_j f - m n u_i u_j \\
\implies \frac{1}{mn} \nabla_j P_{ij} &= \frac{1}{n} \nabla_j \int d\mathbf{v} v_i v_j f - \frac{1}{n} \nabla_j n u_i u_j \\
\implies \frac{1}{n} \nabla_j \int d\mathbf{v} v_i v_j f &= \frac{1}{mn} \nabla_j P_{ij} + \frac{1}{n} \nabla_j n u_i u_j. \tag{26}
\end{aligned}$$

(26) dans (23)  $\implies$

$$\begin{aligned}
\partial_t u_i + \frac{1}{mn} \nabla_j P_{ij} + \frac{1}{n} \underbrace{\left( \nabla_j n u_i u_j - u_i u_j \nabla_j n - n u_i \nabla_j u_j \right)}_{= u_i u_j \nabla_j n + n u_j \nabla_j u_i + n u_i \nabla_j u_j} &= -p \frac{1}{n} \omega[f, V_i f] \tag{27}
\end{aligned}$$

$$\implies \boxed{\partial_t u_i + \frac{1}{mn} \nabla_j P_{ij} + u_j \nabla_j u_i = -p \frac{1}{n} \omega[f, V_i f], \quad i = 1, \dots, d.} \tag{28}$$

### 2.2.3 Energie

$$\begin{aligned}
&\underbrace{\int d\mathbf{v} \frac{1}{2} m v^2 (\partial_t + v_j \nabla_j) f}_{= \frac{1}{2} \int d\mathbf{v} v^2 \partial_t f + \frac{1}{2} m \int d\mathbf{v} v^2 v_j \nabla_j f}_{= \partial_t \int d\mathbf{v} v^2 f \quad = \nabla_j \int d\mathbf{v} v^2 v_j f} = p \underbrace{\int d\mathbf{v} \frac{1}{2} m v^2 J_a[f, f]}_{\stackrel{(15)}{=} -\frac{1}{2} m \omega[f, v^2 f]} + (1-p) \underbrace{\int d\mathbf{v} \frac{1}{2} m v^2 J_c[f, f]}_{= 0} \\
\implies \frac{1}{n} \partial_t \int d\mathbf{v} v^2 f + \frac{1}{n} \nabla_j \int d\mathbf{v} v^2 v_j f &= -p \frac{1}{n} \omega[f, v^2 f] \tag{29}
\end{aligned}$$

Pour continuer, on introduit d'abord le courant de chaleur  $\mathbf{q}$  défini par

$$q_i(\mathbf{r}, t) = \frac{m}{2} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v} V^2 V_i f(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t) = \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v} \underbrace{\left( \frac{m}{2} \mathbf{V}^2 - \frac{d+2}{2} k_B T \right)}_{\doteq S_i(\mathbf{V})} V_i f(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t) = \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v} S_i(\mathbf{V}) f(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t). \tag{30}$$

En effet, on peut ajouter un terme arbitraire linéaire en  $V_i$  dont la contribution sera nulle, car par exemple dans notre cas

$$-\frac{d+2}{2}k_B T \int d\mathbf{v} V_i f = -\frac{d+2}{2}k_B T \left( \underbrace{\int d\mathbf{v} v_i f}_{=nu_i} - \underbrace{\int d\mathbf{v} u_i f}_{=u_i n} \right) = 0. \quad (31)$$

Ainsi, on va utiliser dans (29) la relation :

$$\begin{aligned} \nabla_j q_j &\stackrel{(30)}{=} \nabla_j \int d\mathbf{v} \frac{m}{2} V^2 V_j f \\ &\stackrel{V_j = v_j - u_j}{=} \frac{m}{2} \nabla_j \left( \int d\mathbf{v} v_j v^2 f - \int d\mathbf{v} u_j v^2 f + \underbrace{\int d\mathbf{v} v_j u^2 f}_{=u^2 n u_j} - \underbrace{\int d\mathbf{v} u_j u^2 f}_{=u^2 n u_j} \right. \\ &\quad \left. - 2 \int d\mathbf{v} v_j v_k u_k f + 2 \underbrace{\int d\mathbf{v} u_j v_k u_k f}_{=n u_j u^2} \right) \\ &= \frac{m}{2} \nabla_j \left( \int d\mathbf{v} v_j v^2 f - u_j \int d\mathbf{v} v^2 f - 2u_k \int d\mathbf{v} v_j v_k f + 2n u_j u^2 \right) \quad (32) \\ \implies \frac{2}{mn} \nabla_j q_j &= \frac{1}{n} \nabla_j \int d\mathbf{v} v_j v^2 f - \frac{1}{n} \nabla_j u_j \int d\mathbf{v} v^2 f - \frac{2}{n} \nabla_j u_k \int d\mathbf{v} v_j v_k f + \frac{2}{n} \nabla_j n u_j u^2 \\ \implies \frac{1}{n} \nabla_j \int d\mathbf{v} v_j v^2 f &= \frac{2}{mn} \nabla_j q_j + \frac{1}{n} \nabla_j u_j \int d\mathbf{v} v^2 f + \frac{2}{n} \nabla_j u_k \int d\mathbf{v} v_j v_k f - \frac{2}{n} \nabla_j n u_j u^2 \\ &= 2(\nabla_j u_k) \underbrace{\frac{1}{n} \int d\mathbf{v} v_j v_k f}_{\stackrel{(26)}{=} \frac{1}{mn} P_{jk} + \frac{1}{n} n u_j u_k} + \frac{2}{n} u_k \nabla_j \int d\mathbf{v} v_j v_k f \\ &= \frac{2}{mn} \nabla_j q_j + \frac{1}{n} \nabla_j u_j \int d\mathbf{v} v^2 f - \frac{2}{n} \nabla_j n u_j u^2 \\ &\quad + 2u_k \frac{1}{n} \nabla_j \int d\mathbf{v} v_j v_k f + u_j \nabla_j u^2 + \frac{2}{mn} \underbrace{(\nabla_j u_k) P_{jk}}_{\doteq \mathbf{P} : \nabla \mathbf{u}} + \underbrace{2u_j u_k \nabla_j u_k}_{=u_j \nabla_j u^2} \\ &= \frac{2}{mn} (\mathbf{P} : \nabla \mathbf{u} + \nabla_j q_j) + \frac{1}{n} \nabla_j u_j \int d\mathbf{v} v^2 f - \frac{2}{n} \nabla_j n u_j u^2 \\ &\quad + 2u_k \frac{1}{n} \nabla_j \int d\mathbf{v} v_j v_k f + u_j \nabla_j u^2 \\ &\quad \stackrel{(26)}{=} \frac{1}{mn} \nabla_j P_{kj} + \frac{1}{n} \nabla_j n u_j u_k \\ &= \frac{2}{mn} (\mathbf{P} : \nabla \mathbf{u} + \nabla_j q_j) + \frac{1}{n} \nabla_j u_j \int d\mathbf{v} v^2 f - \frac{2}{n} \nabla_j n u_j u^2 + u_j \nabla_j u^2 \\ &\quad + \frac{2}{mn} u_k \nabla_j P_{kj} + \frac{2}{n} u_k \nabla_j n u_j u_k. \quad (33) \end{aligned}$$

D'autre part, on a aussi la relation :

$$\begin{aligned}
\partial_t T &= \partial_t \frac{m}{nkd} \underbrace{\int d\mathbf{v} V^2 f}_{= \int d\mathbf{v} u^2 f + \int d\mathbf{v} v^2 f - 2 \int d\mathbf{v} v_i u_j f} \\
&= \frac{m}{kd} \partial_t \left( \frac{1}{n} \int d\mathbf{v} v^2 f - u^2 \right) \\
&= \frac{m}{kd} \left( -\frac{1}{n^2} \right) (\partial_t n) \int d\mathbf{v} v^2 f + \frac{m}{kd} \partial_t \int d\mathbf{v} v^2 f - \frac{m}{kd} 2u_j \partial_t u_j \\
\Rightarrow \frac{m}{kd} \frac{1}{n} \partial_t \int d\mathbf{v} v^2 f &= \partial_t T + \frac{m}{kd} \frac{1}{n^2} \underbrace{(\partial_t n)}_{\text{Eq. (21)}} \int d\mathbf{v} v^2 f + \frac{m}{kd} 2u_j \underbrace{\partial_t u_j}_{\text{Eq. (28)}} \\
\Rightarrow \frac{1}{n} \partial_t \int d\mathbf{v} v^2 f &= \frac{kd}{m} \partial_t T - \frac{1}{n^2} \left( p\omega[f, f] + u_j \nabla_j n + n \nabla_j u_j \right) \int d\mathbf{v} v^2 f \\
&\quad - 2 \left( \frac{1}{mn} u_j \nabla_k P_{jk} + u_j u_k \nabla_k u_j + p \frac{1}{n} \omega[f, u_j V_j f] \right). \quad (34)
\end{aligned}$$

Met tout ensemble : (33) et (34) dans (29) donne

$$\begin{aligned}
&\frac{kd}{m} \partial_t T - \frac{1}{n^2} \left( p\omega[f, f] + u_j \nabla_j n + n \nabla_j u_j \right) \int d\mathbf{v} v^2 f - \frac{2}{mn} u_j \nabla_k P_{jk} - 2u_j u_k \nabla_k u_j - 2p \frac{1}{n} \omega[f, u_j V_j f] \\
&+ \frac{2}{mn} (\mathbf{P} : \nabla \mathbf{u} + \nabla_j q_j) + \frac{1}{n} \nabla_j u_j \int d\mathbf{v} v^2 f - \frac{2}{n} \nabla_j n u_j u^2 + u_j \nabla_j u^2 + \frac{2}{mn} u_k \nabla_j P_{kj} + \frac{2}{n} u_k \nabla_j n u_j u_k \\
&= -p \frac{1}{n} \omega[f, v^2 f]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{kd}{m} \partial_t T + \frac{2}{mn} (\mathbf{P} : \nabla \mathbf{u} + \nabla_j q_j) - \frac{1}{n^2} p\omega[f, f] \int d\mathbf{v} v^2 f - 2p \frac{1}{n} \omega[f, u_j V_j f] - \frac{1}{n^2} u_j (\nabla_j n) \int d\mathbf{v} v^2 f \\
- \frac{1}{n} (\nabla_j u_j) \int d\mathbf{v} v^2 f - 2u_j u_k \nabla_k u_j - \frac{2}{n} \underbrace{\nabla_j n u_j u^2}_{= u_j u_k u_k \nabla_j n + n u_k u_k \nabla_j u_j + 2n u_j u_k \nabla_j u_k} + \underbrace{u_j \nabla_j u^2}_{= 2u_j u_k \nabla_j u_k} + \underbrace{\frac{2}{n} u_k \nabla_j n u_j u_k + \frac{1}{n} \nabla_j u_j \int d\mathbf{v} v^2 f}_{= u_j u_k \nabla_j n + n u_k \nabla_j u_j + n u_j \nabla_j u_k} \\
= -p \frac{1}{n} \omega[f, v^2 f]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{kd}{m} \partial_t T + \frac{2}{mn} (\mathbf{P} : \nabla \mathbf{u} + \nabla_j q_j) - \frac{1}{n^2} u_j (\nabla_j n) \int d\mathbf{v} v^2 f + \frac{1}{n} u_j \nabla_j \int d\mathbf{v} v^2 f - 2u_j u_k \nabla_j u_k \\
= \frac{1}{n^2} p\omega[f, f] \int d\mathbf{v} v^2 f - p \frac{1}{n} \omega[f, (v^2 - 2u_j V_j) f] \\
= p \frac{1}{n} \omega[f, f] \frac{kd}{m} \underbrace{\left( \frac{m}{kdn} \int d\mathbf{v} V^2 f + \frac{m}{kdn} n u^2 \right)}_{= T}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \partial_t T + \frac{2}{nkd} (\mathbf{P} : \nabla \mathbf{u} + \nabla_j q_j) + \frac{m}{kd} \left\{ -\frac{1}{n^2} u_j (\nabla_j n) \int d\mathbf{v} v^2 f + \frac{1}{n} u_j \nabla_j \int d\mathbf{v} v^2 f - 2u_j u_k \nabla_j u_k \right\} \\
= p \frac{1}{n} \omega[f, f] \left( T + \frac{m}{kd} u^2 \right) - p \frac{1}{n} \frac{m}{kd} \omega[f, (v^2 - 2u_j V_j) f]. \quad (35)
\end{aligned}$$

On remarque aussi qu'on a :

$$\begin{aligned}
u_j \nabla_j T &= u_j \nabla_j \frac{m}{nkd} \underbrace{\int d\mathbf{v} V^2 f}_{= \int d\mathbf{v} v^2 f - nu_k u_k} \\
&= u_j \nabla_j \frac{m}{nkd} \left( \int d\mathbf{v} v^2 f - nu_k u_k \right) \\
&= \frac{m}{kd} \left( u_j \nabla_j \frac{1}{n} \int d\mathbf{v} v^2 f - u_j \nabla_j u_k u_k \right) \\
&= \frac{m}{kd} \left\{ -\frac{1}{n^2} u_j (\nabla_j n) \int d\mathbf{v} v^2 f + \frac{1}{n} u_j \nabla_j \int d\mathbf{v} v^2 f - 2u_j u_k \nabla_j u_k \right\}. \quad (36)
\end{aligned}$$

Ainsi on voit que le terme entre crochets de l'Eq. (35) est le même que (36), donc (35) devient :

$$\begin{aligned}
\partial_t T + \frac{2}{nkd} (\mathbf{P} : \nabla \mathbf{u} + \nabla_j q_j) + u_j \nabla_j T &= p \frac{1}{n} \omega[f, f] \left( T + \frac{m}{kd} u^2 \right) - p \frac{1}{n} \frac{m}{kd} \omega[f, (v^2 - 2u_j V_j) f] \\
&= p \frac{T}{n} \omega[f, f] + p \frac{m}{nkd} \omega[f, (u^2 - v^2 + 2u_j V_j) f]. \quad (37)
\end{aligned}$$

En utilisant

$$u^2 - v^2 + 2u_j V_j = u^2 - v^2 + 2u_j (v_j - u_j) = -u^2 - v^2 + 2u_j v_j = -(u_j - v_j)^2 = -V^2,$$

on a finalement :

$$\partial_t T + u_i \nabla_i T + \frac{2}{nkd} (\mathbf{P} : \nabla \mathbf{u} + \nabla_j q_j) = p \frac{T}{n} \omega[f, f] - p \frac{m}{nkd} \omega[f, V^2 f]. \quad (38)$$

### 2.3 Résumé

Nous avons établi :

$$\begin{aligned}
\partial_t n + \nabla_i (nu_i) &= -p\omega[f, f], \\
\partial_t u_i + \frac{1}{mn} \nabla_j P_{ij} + u_j \nabla_j u_i &= -p \frac{1}{n} \omega[f, V_i f], \quad i = 1, \dots, d, \\
\partial_t T + u_i \nabla_i T + \frac{2}{nkd} (\mathbf{P} : \nabla \mathbf{u} + \nabla_j q_j) &= p \frac{T}{n} \omega[f, f] - p \frac{m}{nkd} \omega[f, V^2 f],
\end{aligned} \quad (39)$$

avec  $\mathbf{V} = \mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  et

$$\omega[f, g] = \sigma^{d-1} \beta_1 \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 |\mathbf{v}_{12}| g(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1; t) f(\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2; t), \quad (40)$$

$$P_{ij} = m \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v} V_i V_j f(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t) = \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t) D_{ij}(\mathbf{V}) + \frac{n}{\beta} \delta_{ij}, \quad (41)$$

$$q_i(\mathbf{r}, t) = \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v} \left( \frac{m}{2} \mathbf{V}^2 - \frac{d+2}{2} k_B T \right) V_i f(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t) = \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v} S_i(\mathbf{V}) f(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t). \quad (42)$$

Ces équations sont les mêmes que celles que l'on trouve dans la littérature [6, 2, 7, 8, 9, 10], à la différence près des taux de déclin de masse, impulsion, et énergie. On constate que les taux de déclin (membre de droite des Eqs. (39)) ne dépendent pas explicitement du champ de vitesse moyen  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ . Cela doit effectivement être le cas car la dynamique doit être invariante sous toute transformation de Gallilée du champ de vitesse.

### 3 Solution de Chapman-Enskog

Nous cherchons une solution de Chapman-Enskog aux équations de bilan. Il existe néanmoins aussi d'autres approches pour résoudre le problème [11]. Pour appliquer la méthode de Chapman-Enskog, on doit d'abord faire deux hypothèses. La première est que la dépendance spatiale et temporelle de la fonction de distribution  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t)$  peut être exprimée univoquement en fonction des champs hydrodynamiques  $n(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ , et  $T(\mathbf{r}, t)$  :

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t) = f[\mathbf{v}, n(\mathbf{r}, t), \mathbf{u}(\mathbf{r}, t), T(\mathbf{r}, t)]. \quad (43)$$

Cela revient à dire que l'évolution de la fonction de distribution est complètement déterminée par ses premiers moments  $v^0$ ,  $\mathbf{v}^1$ , et  $v^2$ . Une telle solution est appelée *solution normale*. La seconde hypothèse se base sur l'existence (supposée) de deux (au moins) échelles de temps distinctes. L'échelle microscopique est caractérisée par le temps moyen de collision et le libre parcours moyen. L'échelle macroscopique est caractérisée par un temps caractéristique d'évolution des champs hydrodynamiques et de la taille de leurs inhomogénéités. La grande différence entre ces deux échelles de temps (macroscopique et microscopique) implique que sur un temps microscopique les champs hydrodynamiques ne varient que peu. Ainsi ces champs ne sont, sur de telles échelles temporelles et spatiales, que très faiblement inhomogènes. Ceci permet de réaliser un développement en ordres des gradients des champs, i.e. d'appliquer la méthode de Chapman-Enskog. Ainsi on développe la fonction de distribution en ordres de gradients de la façon suivante :

$$f = f^{(0)} + \lambda f^{(1)} + \lambda^2 f^{(2)} + \dots = \sum_{i \geq 0} \lambda^i f^{(i)}, \quad (44)$$

où chaque puissance  $i$  du paramètre  $\lambda$  correspond à l'ordre  $i$  dans le gradient spatial. Ce paramètre  $\lambda$  n'a donc qu'une présence *formelle* dans ce développement, et signifie que le terme qu'il multiplie est de l'ordre d'un gradient à la puissance  $i$ . On peut donner une interprétation physique du petit paramètre  $\lambda$  : il s'agit du rapport de libre parcours moyen sur la longueur d'onde de la variation hydrodynamique. On voit à nouveau surgir cette idée de séparation des échelles de temps microscopique et macroscopique. La méthode de Chapman-Enskog suppose l'existence d'une hiérarchie d'échelles de temps, et donc d'une hiérarchie de dérivées temporelles :

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial^{(0)}}{\partial t} + \lambda \frac{\partial^{(1)}}{\partial t} + \lambda^2 \frac{\partial^{(2)}}{\partial t} + \dots = \sum_{i \geq 0} \lambda^i \frac{\partial^{(i)}}{\partial t}, \quad (45)$$

où l'ordre  $i$  dans la hiérarchie temporelle correspond au même ordre dans le gradient spatial. Ainsi, plus l'ordre est élevé dans le gradient spatial, plus la variation temporelle correspondante est lente. Ceci est bien consistant avec ce qui a été présenté précédemment. Par exemple pour l'état homogène de déclin libre (c'est l'ordre zéro  $f^{(0)}$ ), la variation temporelle est très grande ce qui signifie que cet ordre du développement capture les phénomènes sur des échelles de temps tellement petites que l'état hydrodynamique (donc macroscopique) n'a pas le temps d'être modifié, d'où l'homogénéité locale. Ainsi  $f^{(0)}$  correspond à l'ordre zéro dans les gradients, c'est-à-dire à la solution homogène. On connaît cette solution, c'est la solution homogène du déclin libre ("homogeneous cooling state") trouvée dans le contexte du calcul du  $a_2$  de l'annihilation probabiliste. En effet, en remplaçant les développements (44) et (45) dans l'équation de Boltzmann (12), avec (8) et (9), on a

$$\begin{aligned} \left( \partial_t^{(0)} + \lambda \partial_t^{(1)} + \dots + \mathbf{v}_1 \cdot \nabla_1 \right) \left( f^{(0)} + \lambda f^{(1)} + \dots \right) &= p J_a \left[ f^{(0)} + \lambda f^{(1)} + \dots, f^{(0)} + \lambda f^{(1)} + \dots \right] \\ &+ (1-p) J_c \left[ f^{(0)} + \lambda f^{(1)} + \dots, f^{(0)} + \lambda f^{(1)} + \dots \right], \quad (46) \end{aligned}$$

et on collecte les termes de même ordre. En particulier, à l'ordre le plus bas :

$$\partial_t^{(0)} f^{(0)} = p J_a[f^{(0)}, f^{(0)}] + (1-p) J_c[f^{(0)}, f^{(0)}], \quad (47)$$

ce qui est bien l'équation qu nous avons résolue dans le contexte du développement de Sonine. Utilisant la distribution d'échelle ("scaling function"), on a trouvé :

$$f^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t) = \frac{n(\mathbf{r}, t)}{v_T(\mathbf{r}, t)^d} \tilde{f}(c) = \frac{n(\mathbf{r}, t)}{v_T(\mathbf{r}, t)^d} \mathcal{M}(c) [1 + a_2 S_2(c^2)], \quad (48)$$

où la vitesse thermique  $v_T(\mathbf{r}, t)$  est défini par la relation

$$\begin{aligned} \frac{d}{2} n k_B T &= \frac{d}{2} n \left( \frac{1}{2} m v_T^2 \right) \\ \Rightarrow v_T &= \sqrt{\frac{2}{m\beta}}, \quad \beta = \frac{1}{k_B T(\mathbf{r}, t)}, \end{aligned} \quad (49)$$

et aussi

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{M}(c) = \frac{1}{\pi^{d/2}} e^{-c^2} \\ S_2(x) = \frac{1}{2} x^2 - \frac{d+2}{2} x + \frac{d(d+2)}{8} \\ a_2 = \frac{8}{6 + 4d - \sqrt{2} + \frac{1-p}{p} 8\sqrt{2}(d-1)} \\ \mathbf{c} = \frac{\mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}{v_T} = \frac{\mathbf{V}}{v_T}. \end{array} \right. \quad (50)$$

Quelques commentaires sont nécessaires. L'existence d'une distribution d'échelle est confirmée par des simulations (DSMC ou dynamique moléculaire) non seulement pour l'annihilation pure [5] ou pour un gaz inélastique [8, 9], mais aussi pour la dynamique d'agrégation balistique. La solution  $f^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t)$  trouvée dans le contexte de l'annihilation probabiliste est homogène. Or à présent, comme on le voit de (48), la solution

$$f^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t) = f^{(0)}(\mathbf{V}, n(\mathbf{r}, t), \mathbf{u}(\mathbf{r}, t), T(\mathbf{r}, t)) \quad (51)$$

n'est a priori plus homogène à cause de la dépendance fonctionnelle dans les champs hydrodynamiques, qui eux sont non-homogènes et dépendent du temps, par définition de la méthode de Chapman-Enskog. Ceci signifie que cette méthode fournit une expansion autour de l'état de l'équilibre local. Ainsi, on remplace de même la vitesse rescalée  $\mathbf{c} = \mathbf{v}/v_T$ , obtenue dans le travail sur l'annihilation probabiliste, par la vitesse rescalée autour de la vitesse moyenne :  $\mathbf{c} = (\mathbf{v} - \mathbf{u})/v_T$ . Il s'agit bien de la définition correcte de  $\mathbf{c}$  car on a alors  $\langle \mathbf{c} \rangle = 0$ , pour ne prendre en considération que les fluctuations autour de l'équilibre local. La méthode consiste à résoudre itérativement l'équation de Boltzmann, faisant usage de la solution à l'ordre précédent pour trouver celle à l'ordre suivant.

### 3.1 Ordre zéro

Comme  $f^{(0)}(V)$  est isotrope, alors des définitions du tenseur de pression et du courant de chaleur on a :

$$P_{ij}^{(0)} = m \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v} \left( V_i V_j - \frac{V^2}{d} \delta_{ij} \right) f(V) + \frac{n}{\beta} \delta_{ij} = \underbrace{nk_B T}_{\equiv P^{(0)}} \delta_{ij} \quad (52)$$

$$q_i = \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v} \left( \frac{m}{2} V^2 - \frac{d+2}{2} k_B T \right) V_i f(V) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, d. \quad (53)$$

En effet, il y a nullité des intégrations car on intègre une fonction antisymétrique sur un domaine symétrique.  $P^{(0)}(\mathbf{r}, t) = n(\mathbf{r}, t) k_B T(\mathbf{r}, t)$  est la pression hydrostatique. Nous aurons par la suite

besoin des équations hydrodynamiques à cet ordre. Ainsi, on collecte les termes d'ordre 0 en les gradients dans (39)

$$\partial_t^{(0)} n = -p\omega[f^{(0)}, f^{(0)}] \doteq -pn\xi_n^{(0)} \quad (54)$$

$$\partial_t^{(0)} u_i = -p\frac{1}{n}\omega[f^{(0)}, V_i f^{(0)}] \doteq -pv_T \xi_{u_i}^{(0)} = 0 \quad (55)$$

$$\partial_t^{(0)} T = p\frac{T}{n}\omega[f^{(0)}, f^{(0)}] - p\frac{m}{nkd}\omega[f^{(0)}, V^2 f^{(0)}] \doteq -pT\xi_T^{(0)}, \quad (56)$$

où  $\xi_n^{(0)}$ ,  $\xi_{u_i}^{(0)}$ , et  $\xi_T^{(0)}$  sont les taux de déclin à l'ordre zéro. Les dimensions des taux  $\xi_n^{(0)}$  et  $\xi_T^{(0)}$  sont bien la grandeur considérée par unité de temps. Ceci n'est pas le cas de  $\xi_{u_i}^{(0)}$ . On se ramène à un taux en définissant  $\xi_{u_i} \doteq \xi_{u_i}^{(0)}/v_T$ . Néanmoins, pour des raisons de simplifications calculatoires, on va garder la première définition, pour ne poser qu'à la fin des calculs  $\xi_{u_i} \doteq \xi_{u_i}^{(0)}/v_T$ . Pour des raisons de symétrie on constate que  $\xi_{u_i}^{(0)} = 0$ . Les simplifications seront effectuées dans la Sect. 3.2.4.

## 3.2 Ordre un

On collecte les termes d'ordre 1 en les gradients dans l'équation de Boltzmann (46) :

$$\begin{aligned} \partial_t^{(0)} f^{(1)} + \partial_t^{(1)} f^{(0)} + \mathbf{v}_1 \cdot \nabla_{\mathbf{r}_1} f^{(0)} \\ = pJ_a[f^{(0)}, f^{(1)}] + pJ_a[f^{(1)}, f^{(0)}] + (1-p)J_c[f^{(0)}, f^{(1)}] + (1-p)J_c[f^{(1)}, f^{(0)}]. \end{aligned} \quad (57)$$

Soit

$$(Jf^{(1)})(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1; t) = -pJ_a[f^{(0)}, f^{(1)}] - pJ_a[f^{(1)}, f^{(0)}] - (1-p)J_c[f^{(0)}, f^{(1)}] - (1-p)J_c[f^{(1)}, f^{(0)}], \quad (58)$$

alors l'équation de Boltzmann s'écrit

$$\left( \partial_t^{(0)} + J \right) f^{(1)} = - \left( \partial_t^{(1)} + \mathbf{v}_1 \cdot \nabla_{\mathbf{r}_1} \right) f^{(0)}. \quad (59)$$

Le membre de droite de (59) est connu et peut-être calculé car  $f^{(0)}$  a été auparavant déterminé. Néanmoins, il faut réaliser ce calcul de façon judicieuse. En effet, on sait que  $f^{(1)}$  est d'ordre 1 dans les gradients, i.e. on sait que la solution normale pour  $f^{(1)}$  doit être de la forme (écrire par exemple  $\nabla_i \ln T$  ou bien  $\nabla_i T$  est équivalent : le facteur  $1/T$  est alors absorbé dans le coefficient multipliant le gradient) :

$$\boxed{f^{(1)} = \mathcal{A}_i \nabla_i \ln T + \mathcal{B}_i \nabla_i \ln n + \mathcal{C}_{ij} \nabla_j u_i.} \quad (60)$$

$f^{(1)}$  n'est pas toujours de la forme (60), comme par exemple dans le cas d'un fluide dense de sphères dures inélastiques [12]. Pour une justification de la forme (60), voir la discussion qui suit l'Eq. (81). Ainsi le but est de reformuler le membre de droite de (59) pour faire apparaître de façon explicite les gradients des champs hydrodynamiques. En égalisant les coefficients de ces gradients on obtient alors un ensemble d'équations pour  $\mathcal{A}_i$ ,  $\mathcal{B}_i$ , et  $\mathcal{C}_{ij}$ . Ces coefficients dépendent de  $n$ ,  $\mathbf{V}$ , et  $T$ . Pour simplifier le membre de droite de (59), il est nécessaire d'utiliser les équations de bilan à l'ordre 1. De (39) on a

### 3.2.1 Equations de bilan

#### 3.2.1.1 Masse :

$$\partial_t^{(1)} n + \nabla_i (nu_i) = -p\omega[f^{(0)}, f^{(1)}] - p\omega[f^{(1)}, f^{(0)}] \quad (61)$$

Or :

$$\begin{aligned} \omega[f, g] &\stackrel{(40)}{=} \sigma^{d-1} \beta_1 \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v}_1 \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v}_2 |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| f(\mathbf{v}_2) g(\mathbf{v}_1) \\ &\stackrel{\mathbf{v}_1 \doteq \mathbf{v}_2}{\stackrel{\mathbf{v}_2 \doteq \mathbf{v}_1}{\equiv}} \sigma^{d-1} \beta_1 \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v}_1 \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v}_2 |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| g(\mathbf{v}_2) f(\mathbf{v}_1) \\ &= \omega[g, f]. \end{aligned} \quad (62)$$

Ainsi (62) dans (61) donne :

$$\partial_t^{(1)}n + \nabla_i(nu_i) = \underbrace{-2p\omega[f^{(0)}, f^{(1)}]}_{\doteq -pn\xi_n^{(1)}}. \quad (63)$$

**3.2.1.2 Impulsion :**

$$\partial_t^{(1)}u_i + \frac{1}{mn}\nabla_j P_{ij} + u_j\nabla_j u_i = -p\frac{1}{n}\omega[f^{(0)}, V_i f^{(1)}] - p\frac{1}{n}\omega[f^{(1)}, V_i f^{(0)}] \quad (64)$$

Or dans cette dernière expression, chaque terme sommé est d'ordre 1 dans les gradients. Ceci implique que le tenseur de pression est celui trouvé à l'ordre 0, i.e.  $P_{ij} = P_{ij}^{(0)} = p^{(0)}\delta_{ij} = nkT\delta_{ij}$ , et donc :

$$\partial_t^{(1)}u_i + \frac{k}{mn}\nabla_i(nT) + u_j\nabla_j u_i = \underbrace{-p\frac{1}{n}\omega[f^{(0)}, V_i f^{(1)}] - p\frac{1}{n}\omega[f^{(1)}, V_i f^{(0)}]}_{\doteq -pv_T\xi_{u_i}^{(1)}}. \quad (65)$$

**3.2.1.3 Energie :**

$$\begin{aligned} \partial_t^{(1)}T + u_i\nabla_i T + \frac{2}{nkd}(\mathbf{P} : \nabla\mathbf{u} + \nabla_j q_j) \\ \stackrel{(62)}{=} p\frac{2T}{n}\omega[f^{(0)}, f^{(1)}] - p\frac{m}{nkd}\omega[f^{(0)}, V^2 f^{(1)}] - p\frac{m}{nkd}\omega[f^{(1)}, V^2 f^{(0)}] \end{aligned} \quad (66)$$

A nouveau, chaque terme sommé étant d'ordre 1 on a  $P_{ij} = p^{(0)}\delta_{ij}$  et  $q_i = 0$ . Ainsi avec  $\mathbf{P} : \nabla\mathbf{u} = (\nabla_j u_k)P_{jk} = p^{(0)}\nabla_j u_j$  on a :

$$\partial_t^{(1)}T + u_i\nabla_i T + \frac{2}{d}T\nabla_i u_i = \underbrace{p\frac{2T}{n}\omega[f^{(0)}, f^{(1)}] - p\frac{m}{nkd}\omega[f^{(0)}, V^2 f^{(1)}] - p\frac{m}{nkd}\omega[f^{(1)}, V^2 f^{(0)}]}_{\doteq -pT\xi_T^{(1)}}. \quad (67)$$

**3.2.2 Equation de Boltzmann et gradients**

**3.2.2.1 Reformulation du membre de droite de (59)** Remarquons que les exposants ( $i$ ) dans les dérivées ne jouent à présent plus aucun rôle une fois les équations à un ordre donné écrites. On ne les note plus dans la suite. Comme on recherche une solution normale, alors toute la dépendance temporelle est à présent contenue dans les champs hydrodynamiques. Ainsi :

$$\partial_t f^{(0)} = \frac{\partial f^{(0)}}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (68)$$

et en notant  $\mathbf{v}_1 = (v_1, \dots, v_d)$ ,  $\mathbf{r}_1 = (r_1, \dots, r_d)$ , on a :

$$\mathbf{v}_1 \cdot \nabla_{\mathbf{r}_1} f^{(0)} = v_i \nabla_i f^{(0)} = v_i \frac{\partial f^{(0)}}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial r_i} + v_j \frac{\partial f^{(0)}}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial r_j} + v_i \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial r_i}. \quad (69)$$

Or comme nous connaissons la forme de  $f^{(0)}$ , donnée par (48), on a aussi :

$$\frac{\partial f^{(0)}}{\partial n} = \frac{1}{n} f^{(0)}, \quad (70)$$

et comme  $V_i = v_i - u_i$  :

$$\frac{\partial f^{(0)}}{\partial u_i} = -\frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i}. \quad (71)$$

(68)–(71) dans le membre de droite de (59) donne :

$$-(\partial_t + v_i \nabla_i) f^{(0)} = -f^{(0)} \left( \frac{1}{n} \partial_t n + \frac{1}{n} v_i \nabla_i n \right) + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i} (\partial_t u_i + v_j \nabla_j u_i) - \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T} (\partial_t T + v_i \nabla_i T). \quad (72)$$

Pour poursuivre, il est nécessaire d'utiliser les équations hydrodynamiques à l'ordre 1 (en effet, on se souvient de la notation complète  $\partial_t^{(1)}$  qui signifie qu'il faut bien reprendre les équations de bilan (63), (65), et (67)). Ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \partial_t n + \frac{1}{n} v_i \nabla_i n &\stackrel{(63)}{=} \frac{1}{n} \left( -u_i \nabla_i n - n \nabla_i u_i + v_i \nabla_i n - p n \xi_n^{(1)} \right) \\ &\stackrel{v_i = \underline{V}_i + u_i}{=} V_i \nabla_i \ln n - \nabla_i u_i - p \xi_n^{(1)} \end{aligned} \quad (73)$$

$$\begin{aligned} \partial_t u_i + v_j \nabla_j u_i &\stackrel{(65)}{=} -\frac{k}{mn} (n \nabla_i T + T \nabla_i n) - u_j \nabla_j u_i + v_j \nabla_j u_i - p \xi_{u_i}^{(1)} \\ &\stackrel{v_j = \underline{u}_j + V_j}{=} V_j \nabla_j u_i - \frac{kT}{m} \nabla_i \ln n - \frac{kT}{m} \nabla_i \ln T - p \xi_{u_i}^{(1)} \end{aligned} \quad (74)$$

$$\begin{aligned} \partial_t T + v_i \nabla_i T &\stackrel{(67)}{=} -u_i \nabla_i T - \frac{2}{d} T \nabla_i u_i + v_i \nabla_i T - p T \xi_T^{(1)} \\ &\stackrel{v_i = \underline{u}_i + V_i}{=} V_i \nabla_i T - \frac{2}{d} T \nabla_i u_i - p T \xi_T^{(1)} \end{aligned} \quad (75)$$

Met tout ensemble : (73)–(75) dans (72) donne :

$$\begin{aligned} -(\partial_t + v_i \nabla_i) f^{(0)} &= f^{(0)} \left( \nabla_i u_i - V_i \nabla_i \ln n + p \xi_n^{(1)} \right) \\ &+ \frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i} \left( V_j \nabla_j u_i - \frac{kT}{m} \nabla_i \ln n - \frac{kT}{m} \nabla_i \ln T - p \xi_{u_i}^{(1)} \right) \\ &+ \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T} \left( \frac{2}{d} T \nabla_i u_i - V_i \nabla_i T + p T \xi_T^{(1)} \right). \end{aligned} \quad (76)$$

En utilisant

$$\frac{\partial}{\partial V_i} \left( V_j f^{(0)} \right) \nabla_j u_i = f^{(0)} \delta_{ij} \nabla_j u_i + V_j \frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i} \nabla_j u_i = f^{(0)} \nabla_i u_i + V_j \frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i} \nabla_j u_i, \quad (77)$$

on peut reformuler (76) de la façon suivante :

$$\begin{aligned} -(\partial_t + v_i \nabla_i) f^{(0)} &= \underbrace{\left( f^{(0)} \delta_{ij} + V_j \frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i} \right)}_{= \frac{\partial}{\partial V_i} (V_j f^{(0)})} + \frac{2}{d} T \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T} \delta_{ij} \nabla_j u_i \\ &\stackrel{\doteq C_{ij}}{=} \underbrace{\left( -V_i f^{(0)} - \frac{kT}{m} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i} \right)}_{\doteq B_i} \nabla_i \ln n + \underbrace{\left( -V_i T \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T} - \frac{kT}{m} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i} \right)}_{= A_i} \nabla_i \ln T \\ &+ p \Omega f^{(1)}, \end{aligned} \quad (78)$$

où  $\Omega f^{(1)}$  est défini par :

$$\begin{aligned}
\Omega f^{(1)} &= f^{(0)} \xi_n^{(1)} - \frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i} \xi_{u_i}^{(1)} + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T} T \xi_T^{(1)} \\
&= \frac{1}{n} f^{(0)} \underbrace{\frac{2}{n} \omega[f^{(0)}, f^{(1)}]}_{=\xi_n^{(1)}} - \frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i} v_T \underbrace{\frac{1}{n v_T} \left\{ \omega[f^{(0)}, V_i f^{(1)}] + \omega[f^{(1)}, V_i f^{(0)}] \right\}}_{=\xi_{u_i}^{(1)}} \\
&\quad + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T} T \underbrace{\frac{1}{n} \left\{ -2\omega[f^{(0)}, f^{(1)}] + \frac{m}{kTd} \omega[f^{(0)}, V^2 f^{(1)}] + \frac{m}{kTd} \omega[f^{(1)}, V^2 f^{(0)}] \right\}}_{=\xi_T^{(1)}}. \tag{80}
\end{aligned}$$

Ayant calculé le membre de droite, l'équation de Boltzmann s'écrit donc

$$\boxed{\left( \partial_t^{(0)} + J \right) f^{(1)} = A_i \nabla_i \ln T + B_i \nabla_i \ln n + C_{ij} \nabla_i u_j + p \Omega f^{(1)}}. \tag{81}$$

Il reste donc à développer le membre de gauche. Remarquons que de l'Eq. (81) on peut justifier la forme de  $f^{(1)}$  donnée par (60). En effet, (81) se réécrit :

$$L f^{(1)} = \tilde{A}_i \nabla_i \ln T + \tilde{B}_i \nabla_i \ln n + \tilde{C}_{ij} \nabla_i u_j, \tag{82}$$

où  $L = \partial_t + J - p\Omega$  est un opérateur linéaire, et  $\tilde{A}_i, \tilde{B}_i, \tilde{C}_{ij}$  des fonctions à déterminer qui dépendent de  $\mathbf{V}$ . Comme  $L$  n'agit que sur les vitesses,  $f^{(1)}$  doit exactement être de la forme (60) (sans termes additionnels comme dans [12]).

Nous pouvons encore simplifier les expressions  $A_i$  et  $C_{ij}$ .  $f^{(0)}$  ne dépend de la vitesse que par la quantité  $V/v_T$ , où  $v_T = \sqrt{2/m\beta}$ , avec  $\beta = 1/k_B T$ . Ainsi sa dépendance en la température est de la forme  $T^{-d/2} \bar{f}^{(0)}(V/T^{1/2})$ , pour des raisons de normalisation. Par conséquent :

$$\begin{aligned}
-T \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T} &= -T \frac{\partial}{\partial T} \left( T^{-d/2} \bar{f}^{(0)}(V/T^{1/2}) \right) \\
&= -T \left( -\frac{d}{2} T^{-d/2-1} \bar{f}^{(0)}(V/T^{1/2}) + T^{-d/2} \frac{\partial}{\partial T} \bar{f}^{(0)}(V/T^{1/2}) \right) \\
&= \frac{d}{2} f^{(0)} - T T^{-d/2} \frac{\partial}{\partial T} \bar{f}^{(0)}(V/T^{1/2}). \tag{83}
\end{aligned}$$

Avec  $\mathbf{u} = \mathbf{V}/T^{1/2}$ ,  $\partial/\partial u_i = T^{1/2} \partial/\partial V_i$ , on a :

$$\frac{\partial}{\partial T} \bar{f}^{(0)}(V/T^{1/2}) = \frac{\partial \bar{f}^{(0)}}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial T} = -\frac{1}{2} V_i T^{-3/2} \frac{\partial \bar{f}^{(0)}}{\partial u_i} = -\frac{1}{2} V_i T^{-3/2} T^{1/2} \frac{\partial \bar{f}^{(0)}}{\partial V_i} = -\frac{1}{2} V_i \frac{1}{T} \frac{\partial \bar{f}^{(0)}}{\partial V_i}. \tag{84}$$

Insérant (84) dans (83) il vient

$$-T \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T} = \frac{d}{2} f^{(0)} + \frac{1}{2} V_i T^{d/2} \frac{\partial}{\partial V_i} \bar{f}^{(0)}(V/T^{1/2}). \tag{85}$$

D'autre part :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial V_i} \left( V_i f^{(0)} \right) = \frac{d}{2} f^{(0)} + \frac{1}{2} V_i T^{d/2} \frac{\partial}{\partial V_i} \bar{f}^{(0)}(V/T^{1/2}). \tag{86}$$

Comparant les Eqs. (85) et (86) on obtient

$$-T \frac{\partial}{\partial T} f^{(0)} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial V_i} \left( V_i f^{(0)} \right). \tag{87}$$

Insérant cette dernière relation dans  $A_i$  et  $C_{ij}$  il vient

$$A_i = \frac{V_i}{2} \frac{\partial}{\partial V_j} \left( V_j f^{(0)} \right) - \frac{kT}{m} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i}, \quad (88)$$

$$B_i = -V_i f^{(0)} - \frac{kT}{m} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i}, \quad (89)$$

$$C_{ij} = \frac{\partial}{\partial V_i} \left( V_j f^{(0)} \right) - \frac{1}{d} \frac{\partial}{\partial V_k} \left( V_k f^{(0)} \right) \delta_{ij}, \quad (90)$$

où on a rappelé la définition de  $B_i$  pour complétude. En particulier, on constate de l'Eq. (90) que  $\text{Tr}(C) = 0$ .

**3.2.2.2 Reformulation du membre de gauche de (59)** Nous savons que  $f^{(1)}$  est de la forme (60). Comme discuté auparavant, il faut substituer cette forme générale dans le membre de gauche de (76), mettre en évidence les gradients, pour finalement évaluer les coefficients des différents gradients. Pour cela, on a d'abord besoin de  $\partial_t^{(0)} f^{(1)}$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{(0)} f^{(1)}}{\partial t} &= \frac{\partial^{(0)}}{\partial t} (\mathcal{A}_i \nabla_i \ln T + \mathcal{B}_i \nabla_i \ln n + \mathcal{C}_{ij} \nabla_j u_i) \\ &= \nabla_i \ln T \frac{\partial^{(0)} \mathcal{A}_i}{\partial t} + \nabla_i \ln n \frac{\partial^{(0)} \mathcal{B}_i}{\partial t} + \nabla_j u_i \frac{\partial^{(0)} \mathcal{C}_{ij}}{\partial t} \\ &\quad + \underbrace{\mathcal{A}_i \partial_t^{(0)} \nabla_i \ln T}_{= \nabla_i \frac{1}{T} \partial_t^{(0)} T} + \underbrace{\mathcal{B}_i \partial_t^{(0)} \nabla_i \ln n}_{= \nabla_i \frac{1}{n} \partial_t^{(0)} n} + \underbrace{\mathcal{C}_{ij} \partial_t^{(0)} \nabla_j u_i}_{= \nabla_j \partial_t^{(0)} u_i} \\ &= \nabla_i \ln T \left[ \frac{\partial \mathcal{A}_i}{\partial T} \frac{\partial^{(0)} T}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{A}_i}{\partial n} \frac{\partial^{(0)} n}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{A}_i}{\partial u_j} \frac{\partial^{(0)} u_j}{\partial t} \right] \\ &\quad + \nabla_i \ln n \left[ \frac{\partial \mathcal{B}_i}{\partial T} \frac{\partial^{(0)} T}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{B}_i}{\partial n} \frac{\partial^{(0)} n}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{B}_i}{\partial u_j} \frac{\partial^{(0)} u_j}{\partial t} \right] \\ &\quad + \nabla_j u_i \left[ \frac{\partial \mathcal{C}_{ij}}{\partial T} \frac{\partial^{(0)} T}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{C}_{ij}}{\partial n} \frac{\partial^{(0)} n}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{C}_{ij}}{\partial u_k} \frac{\partial^{(0)} u_k}{\partial t} \right] \\ &\quad + \mathcal{A}_i \nabla_i \frac{1}{T} \frac{\partial^{(0)} T}{\partial t} + \mathcal{B}_i \nabla_i \frac{1}{n} \frac{\partial^{(0)} n}{\partial t} + \mathcal{C}_{ij} \nabla_j \frac{\partial^{(0)} u_i}{\partial t}. \end{aligned} \quad (91)$$

La dérivée temporelle des champs hydrodynamiques est celle de l'ordre zéro, donc ces dérivées sont données par les équations de bilan (54) à (56). Utilisons

$$\partial_t^{(0)} n = -pn \xi_n^{(0)}, \quad \xi_n^{(0)} = \frac{1}{n} \omega[f^{(0)}, f^{(0)}], \quad (92)$$

$$\partial_t^{(0)} u_i = -p \xi_{u_i}^{(0)}, \quad \xi_{u_i}^{(0)} = \frac{1}{n} \omega[f^{(0)}, V_i f^{(0)}] = 0, \quad (93)$$

$$\partial_t^{(0)} T = -pT \xi_T^{(0)}, \quad \xi_T^{(0)} = \frac{1}{n} \left\{ \frac{m}{kTd} \omega[f^{(0)}, V^2 f^{(0)}] - \omega[f^{(0)}, f^{(0)}] \right\}, \quad (94)$$

on a

$$\begin{aligned} \nabla_i \frac{1}{T} \frac{\partial^{(0)} T}{\partial t} &\stackrel{(94)}{=} -p \nabla_i \xi_T^{(0)} = -p \left( \frac{\partial \xi_T^{(0)}}{\partial n} \nabla_i n + \frac{\partial \xi_T^{(0)}}{\partial T} \nabla_i T + \frac{\partial \xi_T^{(0)}}{\partial u_j} \nabla_i u_j \right) \\ &= -p \left( n \frac{\partial \xi_T^{(0)}}{\partial n} \nabla_i \ln n + T \frac{\partial \xi_T^{(0)}}{\partial T} \nabla_i \ln T + \frac{\partial \xi_T^{(0)}}{\partial u_j} \nabla_i u_j \right), \end{aligned} \quad (95)$$

$$\nabla_i \frac{1}{n} \frac{\partial^{(0)} n}{\partial t} \stackrel{(92)}{=} -p \nabla_i \xi_n^{(0)} = -p \left( n \frac{\partial \xi_n^{(0)}}{\partial n} \nabla_i \ln n + T \frac{\partial \xi_n^{(0)}}{\partial T} \nabla_i \ln T + \frac{\partial \xi_n^{(0)}}{\partial u_j} \nabla_i u_j \right), \quad (96)$$

$$\nabla_j \frac{\partial^{(0)} u_i}{\partial t} \stackrel{(93)}{=} -p \nabla_j \xi_{u_i}^{(0)} = -p \left( n \frac{\partial \xi_{u_i}^{(0)}}{\partial n} \nabla_j \ln n + T \frac{\partial \xi_{u_i}^{(0)}}{\partial T} \nabla_j \ln T + \frac{\partial \xi_{u_i}^{(0)}}{\partial u_k} \nabla_j u_k \right). \quad (97)$$

En remplaçant (92)–(97) dans (91) on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{(0)} f^{(1)}}{\partial t} &= -p \nabla_i \ln T \left[ T \xi_T^{(0)} \frac{\partial \mathcal{A}_i}{\partial T} + n \xi_n^{(0)} \frac{\partial \mathcal{A}_i}{\partial n} + \xi_{u_j}^{(0)} \frac{\partial \mathcal{A}_i}{\partial u_j} \right] \\ &\quad -p \nabla_i \ln n \left[ T \xi_T^{(0)} \frac{\partial \mathcal{B}_i}{\partial T} + n \xi_n^{(0)} \frac{\partial \mathcal{B}_i}{\partial n} + \xi_{u_j}^{(0)} \frac{\partial \mathcal{B}_i}{\partial u_j} \right] \\ &\quad -p \nabla_j u_i \left[ T \xi_T^{(0)} \frac{\partial \mathcal{C}_{ij}}{\partial T} + n \xi_n^{(0)} \frac{\partial \mathcal{C}_{ij}}{\partial n} + \xi_{u_k}^{(0)} \frac{\partial \mathcal{C}_{ij}}{\partial u_k} \right] \\ &\quad -p \mathcal{A}_i \left[ n \frac{\partial \xi_T^{(0)}}{\partial n} \nabla_i \ln n + T \frac{\partial \xi_T^{(0)}}{\partial T} \nabla_i \ln T + \frac{\partial \xi_T^{(0)}}{\partial u_j} \nabla_i u_j \right] \\ &\quad -p \mathcal{B}_i \left[ n \frac{\partial \xi_n^{(0)}}{\partial n} \nabla_i \ln n + T \frac{\partial \xi_n^{(0)}}{\partial T} \nabla_i \ln T + \frac{\partial \xi_n^{(0)}}{\partial u_j} \nabla_i u_j \right] \\ &\quad -p \mathcal{C}_{ij} \left[ n \frac{\partial \xi_{u_i}^{(0)}}{\partial n} \nabla_j \ln n + T \frac{\partial \xi_{u_i}^{(0)}}{\partial T} \nabla_j \ln T + \frac{\partial \xi_{u_i}^{(0)}}{\partial u_k} \nabla_j u_k \right]. \end{aligned} \quad (98)$$

Dans le dernier terme de (98), il y a sommation sur les indices muets  $i, j$ , que l'on renommé de façon appropriée pour pouvoir mettre en évidence les gradients  $\nabla_i \ln T$ ,  $\nabla_i \ln n$ , et  $\nabla_j u_i$  :

$$-p \mathcal{C}_{ij} n \frac{\partial^{(0)} \xi_{u_i}}{\partial n} \nabla_j \ln n \xrightarrow{i \leftrightarrow j} -p \mathcal{C}_{ji} n \frac{\partial^{(0)} \xi_{u_j}}{\partial n} \nabla_i \ln n, \quad (99)$$

$$-p \mathcal{C}_{ij} T \frac{\partial^{(0)} \xi_{u_i}}{\partial T} \nabla_j \ln T \xrightarrow{i \leftrightarrow j} -p \mathcal{C}_{ji} T \frac{\partial^{(0)} \xi_{u_j}}{\partial T} \nabla_i \ln T, \quad (100)$$

$$-p \mathcal{C}_{ij} \frac{\partial^{(0)} \xi_{u_i}}{\partial u_k} \nabla_j u_k \xrightarrow{i \leftrightarrow k} -p \mathcal{C}_{kj} \frac{\partial^{(0)} \xi_{u_k}}{\partial u_i} \nabla_j u_i. \quad (101)$$

(99)–(101) dans (98) donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{(0)} f^{(1)}}{\partial t} &= -p \nabla_i \ln T \left[ T \xi_T^{(0)} \frac{\partial \mathcal{A}_i}{\partial T} + n \xi_n^{(0)} \frac{\partial \mathcal{A}_i}{\partial n} + \xi_{u_j}^{(0)} \frac{\partial \mathcal{A}_i}{\partial u_j} + \mathcal{A}_i T \frac{\partial \xi_T^{(0)}}{\partial T} + \mathcal{B}_i T \frac{\partial \xi_n^{(0)}}{\partial T} + \mathcal{C}_{ji} T \frac{\partial \xi_{u_j}^{(0)}}{\partial T} \right] \\ &\quad -p \nabla_i \ln n \left[ T \xi_T^{(0)} \frac{\partial \mathcal{B}_i}{\partial T} + n \xi_n^{(0)} \frac{\partial \mathcal{B}_i}{\partial n} + \xi_{u_j}^{(0)} \frac{\partial \mathcal{B}_i}{\partial u_j} + \mathcal{A}_i n \frac{\partial \xi_T^{(0)}}{\partial n} + \mathcal{B}_i n \frac{\partial \xi_n^{(0)}}{\partial n} + \mathcal{C}_{ji} n \frac{\partial \xi_{u_j}^{(0)}}{\partial n} \right] \\ &\quad -p \nabla_j u_i \left[ T \xi_T^{(0)} \frac{\partial \mathcal{C}_{ij}}{\partial T} + n \xi_n^{(0)} \frac{\partial \mathcal{C}_{ij}}{\partial n} + \xi_{u_k}^{(0)} \frac{\partial \mathcal{C}_{ij}}{\partial u_k} + \mathcal{A}_i \frac{\partial \xi_T^{(0)}}{\partial u_j} + \mathcal{B}_i \frac{\partial \xi_n^{(0)}}{\partial u_j} + \mathcal{C}_{kj} \frac{\partial \xi_{u_k}^{(0)}}{\partial u_i} \right] \end{aligned} \quad (102)$$

$$\doteq -p \alpha_i \nabla_i \ln T - p \beta_i \nabla_i \ln n - p \gamma_{ij} \nabla_j u_i, \quad (103)$$

où  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ , et  $\gamma_{ij}$  sont définis par le passage de (102) à (103). D'autre part, comme l'opérateur  $J$  est linéaire on a :

$$J f^{(1)} \stackrel{(60)}{=} J(\mathcal{A}_i \nabla_i \ln T + \mathcal{B}_i \nabla_i \ln n + \mathcal{C}_{ij} \nabla_j u_i) = (J \mathcal{A}_i) \nabla_i \ln T + (J \mathcal{B}_i) \nabla_i \ln n + (J \mathcal{C}_{ij}) \nabla_j u_i. \quad (104)$$

En effet, l'opérateur  $J$  dont la définition est donnée par (58), (8), et (9), n'agit pas sur les champs hydrodynamiques, qui ne dépendent effectivement que de la position et du temps (on se souvient que l'opérateur  $J$  consiste essentiellement en une intégration sur les vitesses). Ainsi, de (103) et (104) :

$$\left( \partial_t^{(0)} + J \right) f^{(1)} = (-p \alpha_i + J \mathcal{A}_i) \nabla_i \ln T + (-p \beta_i + J \mathcal{B}_i) \nabla_i \ln n + (-p \mathcal{C}_{ij} + J \mathcal{C}_{ij}) \nabla_j u_i. \quad (105)$$

**3.2.2.3 Equation de Boltzmann** En égalant (105) et (78) on obtient finalement l'équation de Boltzmann :

$$\begin{aligned} (-p\alpha_i + J\mathcal{A}_i)\nabla_i \ln T + (-p\beta_i + J\mathcal{B}_i)\nabla_i \ln n + (-p\gamma_{ij} + J\mathcal{C}_{ij})\nabla_j u_i \\ = A_i\nabla_i \ln T + B_i\nabla_i \ln n + C_{ij}\nabla_j u_i + p\Omega f^{(1)}. \end{aligned} \quad (106)$$

A nouveau, on peut développer  $\Omega f^{(1)}$  :

$$\Omega f^{(1)} = \Omega(\mathcal{A}_i\nabla_i \ln T + \mathcal{B}_i\nabla_i \ln n + \mathcal{C}_{ij}\nabla_j u_i) = (\Omega\mathcal{A}_i)\nabla_i \ln T + (\Omega\mathcal{B}_i)\nabla_i \ln n + (\Omega\mathcal{C}_{ij})\nabla_j u_i. \quad (107)$$

En effet, pour les mêmes raisons que précédemment on voit de la définition (80) de  $\Omega$  que cet opérateur linéaire n'agit que sur les vitesses, donc pas sur les gradients. (107) dans (106) donne :

$$\begin{aligned} (-p\alpha_i + J\mathcal{A}_i)\nabla_i \ln T + (-p\beta_i + J\mathcal{B}_i)\nabla_i \ln n + (-p\gamma_{ij} + J\mathcal{C}_{ij})\nabla_j u_i \\ = (A_i + p\Omega\mathcal{A}_i)\nabla_i \ln T + (B_i + p\Omega\mathcal{B}_i)\nabla_i \ln n + (C_{ij} + p\Omega\mathcal{C}_{ij})\nabla_j u_i. \end{aligned} \quad (108)$$

Comme on peut faire varier de façon indépendante les gradients des champs hydrodynamiques, (108) fournit  $d(d+2)$  équations pour les  $d(d+2)$  inconnues  $\mathcal{A}_i$ ,  $\mathcal{B}_i$ ,  $\mathcal{C}_{ij}$ . Ces équations sont présentées dans le résumé de la section suivante.

### 3.2.3 Résumé

Pour  $i, j = 1, \dots, d$  on a :

$$\boxed{\begin{aligned} -p\alpha_i + (J - p\Omega)\mathcal{A}_i &= A_i, \\ -p\beta_i + (J - p\Omega)\mathcal{B}_i &= B_i, \\ -p\gamma_{ij} + (J - p\Omega)\mathcal{C}_{ij} &= C_{ij}, \end{aligned}} \quad (109)$$

où

$$\alpha_i = T\xi_T^{(0)}\frac{\partial\mathcal{A}_i}{\partial T} + n\xi_n^{(0)}\frac{\partial\mathcal{A}_i}{\partial n} + \xi_{u_j}^{(0)}\frac{\partial\mathcal{A}_i}{\partial u_j} + \mathcal{A}_iT\frac{\partial\xi_T^{(0)}}{\partial T} + \mathcal{B}_iT\frac{\partial\xi_n^{(0)}}{\partial T} + \mathcal{C}_{ji}T\frac{\partial\xi_{u_j}^{(0)}}{\partial T}, \quad (110)$$

$$\beta_i = T\xi_T^{(0)}\frac{\partial\mathcal{B}_i}{\partial T} + n\xi_n^{(0)}\frac{\partial\mathcal{B}_i}{\partial n} + \xi_{u_j}^{(0)}\frac{\partial\mathcal{B}_i}{\partial u_j} + \mathcal{A}_in\frac{\partial\xi_T^{(0)}}{\partial n} + \mathcal{B}_in\frac{\partial\xi_n^{(0)}}{\partial n} + \mathcal{C}_{ji}n\frac{\partial\xi_{u_j}^{(0)}}{\partial n}, \quad (111)$$

$$\gamma_{ij} = T\xi_T^{(0)}\frac{\partial\mathcal{C}_{ij}}{\partial T} + n\xi_n^{(0)}\frac{\partial\mathcal{C}_{ij}}{\partial n} + \xi_{u_k}^{(0)}\frac{\partial\mathcal{C}_{ij}}{\partial u_k} + \mathcal{A}_i\frac{\partial\xi_T^{(0)}}{\partial u_j} + \mathcal{B}_i\frac{\partial\xi_n^{(0)}}{\partial u_j} + \mathcal{C}_{kj}\frac{\partial\xi_{u_k}^{(0)}}{\partial u_i}, \quad (112)$$

$$A_i = \frac{V_i}{2}\frac{\partial}{\partial V_j}\left(V_j f^{(0)}\right) - \frac{kT}{m}\frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i}, \quad (113)$$

$$B_i = -V_i f^{(0)} - \frac{kT}{m}\frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i}, \quad (114)$$

$$C_{ij} = \frac{\partial}{\partial V_i}\left(V_j f^{(0)}\right) - \frac{1}{d}\frac{\partial}{\partial V_k}\left(V_k f^{(0)}\right)\delta_{ij}, \quad (115)$$

$$\Omega g = f^{(0)}\xi_n^{(1)}[f^{(0)}, g] - \frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i}v_T\xi_{u_i}^{(1)}[f^{(0)}, g] + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T}T\xi_T^{(1)}[f^{(0)}, g], \quad (116)$$

$$Jg = pJ_a[f^{(0)}, g] + pJ_a[g, f^{(0)}] + (1-p)J_c[f^{(0)}, g] + (1-p)J_c[g, f^{(0)}], \quad (117)$$

$$\xi_n^{(0)} = \frac{1}{n}\omega[f^{(0)}, f^{(0)}], \quad (118)$$

$$\xi_{u_i}^{(0)} = \frac{1}{n}\omega[f^{(0)}, V_i f^{(0)}], \quad (119)$$

$$\xi_T^{(0)} = \frac{1}{n} \left\{ \frac{m}{kTd} \omega[f^{(0)}, V^2 f^{(0)}] - \omega[f^{(0)}, f^{(0)}] \right\}, \quad (120)$$

et en utilisant  $\omega[f, g] = \omega[g, f]$  :

$$\xi_n^{(1)}[f^{(0)}, g] = \frac{2}{n}\omega[f^{(0)}, g], \quad (121)$$

$$\xi_{u_i}^{(1)}[f^{(0)}, g] = \frac{1}{nv_T}\omega[f^{(0)}, V_i g] + \frac{1}{nv_T}\omega[V_i f^{(0)}, g], \quad (122)$$

$$\xi_T^{(1)}[f^{(0)}, g] = -\frac{2}{n}\omega[f^{(0)}, g] + \frac{m}{nkTd}\omega[f^{(0)}, V^2 g] + \frac{m}{nkTd}\omega[V^2 f^{(0)}, g]. \quad (123)$$

### 3.2.4 Simplifications

**3.2.4.1 Dépendance fonctionnelle des taux de déclin dans les champs** Par définition des taux de déclin à l'ordre zéro

$$\xi_n^{(0)} \sim \frac{1}{n}\omega[f^{(0)}, f^{(0)}], \quad (124)$$

$$\xi_T^{(0)} \sim \frac{1}{nT}\omega[f^{(0)}, V^2 f^{(0)}] - \frac{1}{n}\omega[f^{(0)}, f^{(0)}], \quad (125)$$

avec

$$\omega[f, g] \sim \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| g(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1; t) f(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_2; t). \quad (126)$$

La distribution d'échelle est de la forme (48) :

$$f^{(0)} \sim \frac{n}{T^{d/2}} \tilde{f}(v^2/T). \quad (127)$$

Par conséquent en utilisant le changement de variables  $\mathbf{y}_1 = \mathbf{v}_1/\sqrt{d}$ ,  $\mathbf{y}_2 = \mathbf{v}_2/\sqrt{d}$  :

$$\begin{aligned} \omega[f^{(0)}, f^{(0)}] &\sim \frac{n^2}{T^d} \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| \tilde{f}(v_1^2/T) \tilde{f}(v_2^2/T) \\ &\sim \frac{n^2}{T^d} \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\mathbf{y}_1 d\mathbf{y}_2 T^d T^{1/2} |\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2| \tilde{f}(y_1^2) \tilde{f}(y_2^2) \\ &\sim n^2 T^{1/2}. \end{aligned} \quad (128)$$

Par conséquent

$$\xi_n^{(0)} \sim nT^{1/2}, \quad (129)$$

$$\xi_T^{(0)} \sim nT^{1/2}. \quad (130)$$

Ceci mène aux relations

$$T \frac{\partial \xi_{n,T}^{(0)}}{\partial T} = Cte_{n,T} T \frac{\partial}{\partial T} (nT^{1/2}) = \frac{1}{2} Cte_{n,T} nT^{1/2} = \frac{1}{2} \xi_{n,T}^{(0)}, \quad (131)$$

$$n \frac{\partial \xi_{n,T}^{(0)}}{\partial n} = Cte_{n,T} n \frac{\partial}{\partial n} (nT^{1/2}) = Cte_{n,T} nT^{1/2} = \xi_{n,T}^{(0)}, \quad (132)$$

où  $Cte_{n,T}$  est la constante de proportionnalité des Eqs. (129) et (130).  $\xi_{n,T}^{(0)}$  est donc fonction propre de l'opérateur  $T\partial_T$  avec valeur propre 1/2, et de l'opérateur  $n\partial_n$  avec valeur propre 1. De plus, comme  $\xi_{T,n}^{(0)}$  ne dépendent pas explicitement de  $\mathbf{u}$ , alors  $\xi_{T,n}^{(0)}$  sont dans le noyau de l'opérateur  $\partial_{u_i}$  :

$$\frac{\partial \xi_{n,T}^{(0)}}{\partial u_i} = 0. \quad (133)$$

**3.2.4.2 Symétries** Nous montrons explicitement que  $\xi_{u_i}^{(0)} = 0 \forall i$ . Par définition

$$\xi_{u_i}^{(0)} = \frac{1}{n} \omega[f^{(0)}, V_i f^{(0)}] \quad (134)$$

$$= \frac{\sigma^{d-1} \beta_1}{n} \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 (\mathbf{V}_1)_i f^{(0)}(V_1) f^{(0)}(V_2) |\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2| \quad (135)$$

$$\stackrel{\mathbf{v}_1 \rightarrow -\mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_2 \rightarrow -\mathbf{v}_2} = \frac{\sigma^{d-1} \beta_1}{n} \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 (-\mathbf{V}_1)_i f^{(0)}(V_1) f^{(0)}(V_2) |\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2| \quad (136)$$

$$= -\frac{1}{n} \omega[f^{(0)}, V_i f^{(0)}] \quad (137)$$

$$= -\xi_{u_i}^{(0)}, \quad (138)$$

d'où  $\xi_{u_i}^{(0)} = 0$ .

### 3.2.5 Résumé

Utilisant les simplifications de la Sect. 3.2.4, le résumé de la Sect. 3.2.3 devient :

$$\begin{cases} \left[ -p \left( \xi_T^{(0)} T \partial_T + \xi_n^{(0)} n \partial_n + \frac{1}{2} \xi_T^{(0)} \right) + J - p\Omega \right] \mathcal{A}_i - p \frac{1}{2} \xi_n^{(0)} \mathcal{B}_i = A_i, \\ \left[ -p \left( \xi_T^{(0)} T \partial_T + \xi_n^{(0)} n \partial_n + \xi_n^{(0)} \right) + J - p\Omega \right] \mathcal{B}_i - p \xi_T^{(0)} \mathcal{A}_i = B_i, \\ \left[ -p \left( \xi_T^{(0)} T \partial_T + \xi_n^{(0)} n \partial_n \right) + J - p\Omega \right] C_{ij} = C_{ij}, \end{cases} \quad (139)$$

où

$$A_i = \frac{V_i}{2} \frac{\partial}{\partial V_j} \left( V_j f^{(0)} \right) - \frac{kT}{m} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i}, \quad (140)$$

$$B_i = -V_i f^{(0)} - \frac{kT}{m} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i}, \quad (141)$$

$$C_{ij} = \frac{\partial}{\partial V_i} \left( V_j f^{(0)} \right) - \frac{1}{d} \frac{\partial}{\partial V_k} \left( V_k f^{(0)} \right) \delta_{ij}, \quad (142)$$

$$\xi_n^{(0)} = \frac{1}{n} \omega[f^{(0)}, f^{(0)}], \quad (143)$$

$$\xi_T^{(0)} = \frac{1}{n} \left\{ \frac{m}{kTd} \omega[f^{(0)}, V^2 f^{(0)}] - \omega[f^{(0)}, f^{(0)}] \right\}, \quad (144)$$

$$Jg = -pJ_a[f^{(0)}, g] - pJ_a[g, f^{(0)}] - (1-p)J_c[f^{(0)}, g] - (1-p)J_c[g, f^{(0)}], \quad (145)$$

$$\omega[f, g] = \sigma^{d-1} \beta_1 \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 |v_{12}| g(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1; t) f(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_2; t), \quad \beta_1 = \frac{\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma[(d+1)/2]}, \quad (146)$$

$$\Omega g = f^{(0)} \xi_n^{(1)}[f^{(0)}, g] - \frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i} v_T \xi_{u_i}^{(1)}[f^{(0)}, g] + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T} T \xi_T^{(1)}[f^{(0)}, g]. \quad (147)$$

### 3.2.6 Conditions de solubilité

Par construction de la méthode de Chapman-Enskog, les moments de  $v^0$ ,  $\mathbf{v}^1$ ,  $v^2$  avec poids  $f$  sont donnés par ceux avec le poids de l'ordre le plus bas  $f^{(0)}$ . Par conséquent, les moments

$$\langle \chi | f^{(k)} \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v} \chi(\mathbf{v}) f^{(k)} = 0, \quad \forall k \geq 1, \quad \chi(\mathbf{v}) = \{v^0, \mathbf{v}^1, v^2\}. \quad (148)$$

Soit  $\mathcal{P}$  le projecteur dans le sous-espace engendré par  $\{v^0, \mathbf{v}^1, v^2\}$  (cf. [12])

$$\mathcal{P}g(\mathbf{v}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{d+2} \psi_i(\mathbf{v}) f^{(0)}(\mathbf{v}) \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v}' \psi_i(\mathbf{v}') g(\mathbf{v}'), \quad (149)$$

où

$$\{\psi_i(\mathbf{v})\} = \{1, c_1 \mathbf{v} + c_2, c_3 v^2\}, \quad (150)$$

avec  $c_i, i = 1, \dots, 3$  des constantes définies dans [12]. La condition (148) signifie que

$$\mathcal{P}f = \mathcal{P}f^{(0)}. \quad (151)$$

En particulier

$$f^{(1)} \in \mathcal{P}^\perp, \quad (152)$$

i.e.  $f^{(1)}$  est dans le sous-espace orthogonal à  $\mathcal{P}$ , ce qui se réécrit

$$\begin{aligned} \mathcal{P}f^{(1)} &= \mathcal{P}(\mathcal{A}_i \nabla_i \ln T + \mathcal{B}_i \nabla_i \ln n + \mathcal{C}_{ij} \nabla_i U_j) \\ \implies \mathcal{P} \begin{pmatrix} \mathcal{A} \\ \mathcal{B} \\ \mathcal{C} \end{pmatrix} &= 0. \end{aligned} \quad (153)$$

La condition (153) est donc une conséquence directe de la définition de la méthode de Chapman-Enskog. On peut montrer que la condition d'existence de  $\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_i,$  et  $\mathcal{C}_{ij}$  non nuls est (condition de solubilité, [12])

$$\mathcal{P} \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{C} \end{pmatrix} = 0. \quad (154)$$

En effet, comme  $\mathcal{P}$  commute avec  $\partial_T, \partial_n,$  et  $J,$  l'application de  $\mathcal{P}$  sur les deux membres du système d'équations (139) livre les relations (154) sous les conditions (153). On vérifie par calcul direct que les relations (154) sont satisfaites [12].

### 3.3 Coefficients de transport

La loi linéaire de transport de la chaleur de Fourier est

$$q_i(\mathbf{r}, t) = -\kappa \nabla_i T(\mathbf{r}, t) - \mu \nabla_i n(\mathbf{r}, t), \quad (155)$$

et celle de friction de Newton (fluide newtonien)

$$P_{ij}(\mathbf{r}, t) = p \delta_{ij} - 2\eta \left( \Lambda_{ij} - \frac{1}{d} \delta_{ij} \nabla_k u_k \right) - \zeta \delta_{ij} \nabla_k u_k. \quad (156)$$

$\kappa$  est le coefficient de conductivité thermique,  $\eta$  le coefficient de viscosité de cisaillement,  $\zeta$  le coefficient de viscosité volumique, et  $\mu$  un coefficient de transport qui pour le gaz inélastique est non nul seulement si le coefficient de restitution est strictement inférieur à l'unité (gaz inélastique, [2]). Finalement  $\Lambda_{ij} = 1/2(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i)$ . Nous posons a priori  $\mu \neq 0,$  et concluons ensuite sur la nullité de  $\mu.$  Pour des gaz dilués, le coefficient de viscosité volumique  $\zeta$  est nul [8, 12]. On tire les coefficients de transport par identification des lois phénoménologiques macroscopiques et des expressions microscopiques de  $P_{ij}$  et  $q_i.$

### 3.3.1 Equations intégrales

#### 3.3.1.1 Pression De l'Eq. (41)

$$P_{ij} = \frac{n}{\beta} \delta_{ij} + \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t) D_{ij}(\mathbf{V}), \quad D_{ij}(\mathbf{V}) = m \left( V_i V_j - \frac{V^2}{d} \delta_{ij} \right), \quad (157)$$

d'où

$$P_{ij}^{(1)} = 0 + \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v} D_{ij}(\mathbf{V}) f^{(1)} = \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v} D_{ij}(\mathbf{V}) \left[ \mathcal{A}_k(\mathbf{V}) \nabla_k \ln T + \mathcal{B}_k \nabla_k \ln n + \mathcal{C}_{kl}(\mathbf{V}) \nabla_k u_l \right]. \quad (158)$$

A nouveau, nous réalisons dans la suite le développement de  $\mathcal{A}_k$ ,  $\mathcal{B}_k$ , et  $\mathcal{C}_{kl}$  en polynômes de Sonine. Nous obtiendrons en particulier au premier ordre non nul  $\mathcal{A}_k \sim S_k(\mathbf{V})$ ,  $\mathcal{B}_k \sim S_k(\mathbf{V})$ , et  $\mathcal{C}_{kl} \sim D_{kl}(\mathbf{V})$ . Donc les propriétés de symétrie de  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  sont les mêmes que celles de  $\mathbf{S}$ , et celles de  $\mathbf{C}$  les mêmes que celles de  $\mathbf{D}$  :

$$\mathcal{A}_k(-\mathbf{V}) = -\mathcal{A}_k(\mathbf{V}), \quad (159)$$

$$\mathcal{B}_k(-\mathbf{V}) = -\mathcal{B}_k(\mathbf{V}), \quad (160)$$

$$\mathcal{C}_{kl}(-\mathbf{V}) = \mathcal{C}_{kl}(\mathbf{V}) \quad (161)$$

Ainsi comme  $D_{ij}(\mathbf{V})$  est une fonction paire de  $\mathbf{V}$ , tandis que  $\mathcal{A}_k$  et  $\mathcal{B}_k$  des fonctions impaires, alors l'intégration du produit de ces fonctions sur un domaine symétrique est nulle. L'Eq. (158) devient donc :

$$P_{ij}^{(1)} = \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v} D_{ij}(\mathbf{V}) \mathcal{C}_{kl}(\mathbf{V}) \nabla_k u_l. \quad (162)$$

L'identification des Eqs. (156) et (162) mène à [8]

$$\eta = -\frac{1}{(d-1)(d+2)} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} D_{ij}(\mathbf{V}) \mathcal{C}_{ij}(\mathbf{V}). \quad (163)$$

La troisième équation de (139) est

$$-p \left( \xi_T^{(0)} T \partial_T + \xi_n^{(0)} n \partial_n \right) \mathcal{C}_{ij} + (J - p\Omega) \mathcal{C}_{ij} = C_{ij}, \quad (164)$$

que l'on intègre sur  $\mathbf{V}$  avec poids  $-1/(d-1)(d+2) \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} D_{ij}(\mathbf{V})$  pour obtenir

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{(d-1)(d+2)} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} D_{ij}(\mathbf{V}) \left[ -p \left( \xi_T^{(0)} T \partial_T \mathcal{C}_{ij} + \xi_n^{(0)} n \partial_n \mathcal{C}_{ij} \right) \right] \\ & -\frac{1}{(d-1)(d+2)} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} D_{ij}(\mathbf{V}) (J - p\Omega) \mathcal{C}_{ij} \\ & = -\frac{1}{(d-1)(d+2)} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} D_{ij}(\mathbf{V}) C_{ij}(\mathbf{V}), \quad (165) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow & -p\xi_T^{(0)}T\partial_T \underbrace{\left[-\frac{1}{(d-1)(d+2)}\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} D_{ij}(V)C_{ij}\right]}_{\stackrel{(163)}{=} \eta} \\
& -p\xi_n^{(0)}n\partial_n \underbrace{\left[-\frac{1}{(d-1)(d+2)}\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} D_{ij}(V)C_{ij}\right]}_{\stackrel{(163)}{=} \eta} \\
& -\underbrace{\frac{1}{(d-1)(d+2)}\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} D_{ij}(\mathbf{V})C_{ij}}_{\stackrel{(163)}{=} \eta} \underbrace{\left[\frac{\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} D_{ij}(\mathbf{V})J\mathcal{C}_{ij}}{\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} D_{ij}(\mathbf{V})C_{ij}} - p\frac{\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} D_{ij}(\mathbf{V})\Omega\mathcal{C}_{ij}}{\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} D_{ij}(\mathbf{V})C_{ij}}\right]}_{\doteq \nu_n} \\
& = -\frac{1}{(d-1)(d+2)}\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} D_{ij}(V)C_{ij}, \quad (166)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \left(-p\xi_T^{(0)}T\partial_T - p\xi_n^{(0)}n\partial_n + \nu_n\right) \eta = -\frac{1}{(d-1)(d+2)}\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} D_{ij}(V)C_{ij}. \quad (167)$$

L'analyse de dépendance fonctionnelle des taux de déclin en les champs hydrodynamiques est la suivante. On sait déjà que  $\xi_T^{(0)} \sim nT^{1/2}$  et  $\xi_n^{(0)} \sim nT^{1/2}$ . Qu'en est-il de  $\eta$ ? Le membre de droite de l'Eq. (167) donne :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} \underbrace{D_{ij}(\mathbf{V})}_{\sim V^2} \underbrace{C_{ij}(\mathbf{V})}_{\sim f^{(0)}} & \sim \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} V^2 \underbrace{f^{(0)}}_{\sim \frac{n}{T^{d/2}} \tilde{f}\left(\frac{V^2}{T}\right)}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{V}/\sqrt{T}, \quad d\mathbf{y} = d\mathbf{V}/T^{d/2} \\
& \sim \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} T^{d/2} y^2 T \frac{n}{T^{d/2}} \tilde{f}(y^2) \\
& \sim nT. \quad (168)
\end{aligned}$$

Le membre de gauche de l'Eq. (164) est proportionnel à  $\xi_{n,T}^{(0)}\eta$ , c'est-à-dire à  $nT^{1/2}\eta$ . On en conclut que

$$\begin{aligned}
& nT^{1/2}\eta \sim nT \\
\Rightarrow & \eta \sim n^0 T^{1/2}. \quad (169)
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$T\partial_T\eta = cteT\partial_T T^{1/2} = \frac{1}{2}cteT^{1/2} = \frac{1}{2}\eta, \quad (170)$$

$$n\partial_n\eta = 0. \quad (171)$$

Insérant les Eqs. (170) et (171) dans l'Eq. (167) il vient

$$\begin{aligned}
& \left(-\frac{1}{2}p\xi_T^{(0)} + \nu_n\right) \eta = -\frac{1}{(d-1)(d+2)}\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} D_{ij}(\mathbf{V})C_{ij}(\mathbf{V}) \\
\Rightarrow & \eta = -\frac{1}{(d-1)(d+2)\left(\nu_n - \frac{1}{2}p\xi_T^{(0)}\right)}\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} D_{ij}(\mathbf{V})C_{ij}(\mathbf{V}). \quad (172)
\end{aligned}$$

En utilisant les définitions de  $D_{ij}(\mathbf{V})$  et  $C_{ij}(\mathbf{V})$  il vient :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} D_{ij}(\mathbf{V}) C_{ij}(\mathbf{V}) &= m \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} \left( V_i V_j - \frac{V^2}{d} \delta_{ij} \right) \left[ \frac{\partial}{\partial V_i} (V_j f^{(0)}) - \frac{1}{d} \frac{\partial}{\partial V_k} (V_k f^{(0)}) \delta_{ij} \right] \\
&= m \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} \left( V_i V_j - \frac{V^2}{d} \delta_{ij} \right) \frac{\partial}{\partial V_i} (V_j f^{(0)}) \\
&\quad - \underbrace{\frac{m}{d} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} \left( V_i V_j - \frac{V^2}{d} \delta_{ij} \right) \frac{\partial}{\partial V_k} (V_k f^{(0)}) \delta_{ij}}_{= \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} \left( \underbrace{V_i V_j \delta_{ij}}_{=V^2} - \underbrace{\frac{V^2}{d} \delta_{ij} \delta_{ij}}_{=d} \right) \frac{\partial}{\partial V_k} (V_k f^{(0)}) = 0} \\
&= m \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} V_i V_j \underbrace{\frac{\partial}{\partial V_i} (V_j f^{(0)})}_{= \delta_{ij} f^{(0)} + V_j \frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i}} - \frac{m}{d} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} V^2 \delta_{ij} \underbrace{\frac{\partial}{\partial V_i} (V_j f^{(0)})}_{= \frac{\partial}{\partial V_i} (V_i f^{(0)})} \\
&\quad = \frac{m}{d} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} V^2 \delta_{ij} \underbrace{\frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i}}_{= df^{(0)} + V_i \frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i}} \\
&= m \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} \underbrace{V_i V_j \delta_{ij}}_{=V^2} f^{(0)} + m \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} \underbrace{V_i V_j V_j \frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i}}_{=V^2 V_i \frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i}} \\
&\quad - m \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} V^2 f^{(0)} - \frac{m}{d} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} V^2 V_i \frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i} \\
&= \underbrace{m \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} V^2 f^{(0)} - m \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} V^2 f^{(0)}}_{=0} + m \frac{d-1}{d} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} V^2 V_i \frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i} \\
&= m \frac{d-1}{d} \left[ - \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} \frac{\partial}{\partial V_i} (V^2 V_i) f^{(0)} + \underbrace{V^2 V_i f^{(0)} \Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} \right] \\
&= -m \frac{d-1}{d} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} f^{(0)} \underbrace{\frac{\partial}{\partial V_i} (V_j V_j V_i)}_{= dV^2 + 2V_i V_j \delta_{ij} = (d+2)V^2} \\
&= -m \frac{(d-1)(d+2)}{d} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} V^2 f^{(0)}. \tag{173}
\end{aligned}$$

Insérant (173) dans (172) il vient

$$\eta = \frac{1}{\nu_\eta - \frac{1}{2} p \xi_T^{(0)}} \frac{1}{d} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} m V^2 f^{(0)}. \tag{174}$$

Or de l'Eq. (52)

$$p^{(0)} = nk_B T = \frac{1}{d} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} m V^2 f^{(0)}, \tag{175}$$

que l'on insère dans l'Eq. (174) pour obtenir

$$\eta = \frac{p^{(0)}}{\nu_\eta - \frac{1}{2} p \xi_T^{(0)}}. \tag{176}$$

Introduisons la viscosité  $\eta_0$  du gaz de sphères dures ( $p = 0$ ), définie par [13]

$$\eta_0 = \frac{d+2}{8} \frac{\Gamma(d/2)}{\pi^{(d-1)/2}} \frac{\sqrt{mk_B T}}{\sigma^{d-1}}, \tag{177}$$

de même que la fréquence caractéristique de collision  $\nu_0$

$$\nu_0 = \frac{p^{(0)}}{\eta_0} \stackrel{(175)}{=} \frac{8}{d+2} \frac{\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma(d/2)} \sigma^{d-1} n \sqrt{\frac{k_B T}{m}}, \quad (178)$$

alors l'Eq. (176) s'écrit

$$\boxed{\frac{\eta}{\eta_0} = \frac{1}{\nu_\eta^* - \frac{1}{2} p \xi_T^{(0)*}},} \quad (179)$$

où

$$\xi_T^{(0)*} = \frac{\xi_T^{(0)}}{\nu_0}, \quad (180)$$

$$\nu_\eta^* = \frac{\nu_\eta}{\nu_0}. \quad (181)$$

On remarque que la structure de l'Eq. (179) est formellement identique à celle du gaz inélastique [2]. La différence implicite réside néanmoins dans les grandeurs  $\xi_T^{(0)}$  et  $\nu_\eta^*$  qui sont définies différemment.

### 3.3.1.2 Courant de chaleur De l'Eq. (42)

$$q_i(\mathbf{r}, t) = \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v} S_i(\mathbf{V}) f(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t), \quad S_i(\mathbf{V}) = \left( \frac{m}{2} V^2 - \frac{d+2}{2} k_B T \right) V_i, \quad (182)$$

d'où

$$q_i^{(1)} = \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v} S_i(\mathbf{V}) f^{(1)} = \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v} S_i(\mathbf{V}) \left[ \mathcal{A}_k(\mathbf{V}) \nabla_k \ln T + \mathcal{B}_k(\mathbf{V}) \nabla_k \ln n + \mathcal{C}_{kl}(\mathbf{V}) \nabla_k u_l \right]. \quad (183)$$

À nouveau, pour des raisons de symétrie comme  $S_i(\mathbf{V})$  est impair en  $\mathbf{V}$  et  $\mathcal{C}_{kl}(\mathbf{V})$  pair, alors l'intégration correspondante est nulle. Ainsi

$$q_i^{(1)} = \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V}) \mathcal{A}_k(\mathbf{V}) \nabla_k \ln T + \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V}) \mathcal{B}_k(\mathbf{V}) \nabla_k \ln n. \quad (184)$$

#### Lemme 3.1

$$\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v} S_i(\mathbf{V}) \mathcal{A}_k(\mathbf{V}) \nabla_k \ln T = \frac{1}{d} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v} S_k(\mathbf{V}) \mathcal{A}_k(\mathbf{V}) \nabla_i \ln T. \quad (185)$$

**Preuve.** On a :

$$\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V}) \mathcal{A}_k(\mathbf{V}) \nabla_k \ln T = \underbrace{\left( \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V}) \mathcal{A}_k(\mathbf{V}) \right)}_{\doteq M_{ik}} \underbrace{\nabla_k \ln T}_{\doteq b_k}. \quad (186)$$

Par symétrie, si  $i \neq k$  alors l'intégrand de  $M_{ik}$  est impair en  $\mathbf{V}$  donc  $M_{ik} = 0$ . Ainsi  $M_{ik} = M_{kk} \delta_{ik}$   
Par isotropie  $M_{kk} = M \forall k$ , et donc

$$\text{Tr } M = \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v} S_k(\mathbf{V}) \mathcal{A}_k(\mathbf{V}) = dM, \quad (187)$$

d'où

$$M = \frac{1}{d} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v} S_k(\mathbf{V}) \mathcal{A}_k(\mathbf{V}), \quad (188)$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v} S_i(\mathbf{V}) \mathcal{A}_k(\mathbf{V}) \nabla_k \ln T = M_{ik} b_k = M_{ik} b_k \delta_{ik} = M b_k \delta_{ik} = \frac{1}{d} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v} S_k(\mathbf{V}) \mathcal{A}_k(\mathbf{V}) \nabla_i \ln T, \quad (189)$$

ce qui achève la preuve.  $\blacksquare$

Ce lemme est aussi applicable à la seconde intégrale de l'Eq. (184). Ainsi cette dernière équation devient

$$q_i^{(1)} = \frac{1}{dT} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v} S_k(\mathbf{V}) \mathcal{A}_k(\mathbf{V}) \nabla_i T + \frac{1}{dn} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v} S_k(\mathbf{V}) \mathcal{B}_k(\mathbf{V}) \nabla_i n, \quad (190)$$

que l'on identifie avec la loi phénoménologique de Fourier (155) pour obtenir

$$\kappa = -\frac{1}{dT} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v} S_i(\mathbf{V}) \mathcal{A}_i(\mathbf{V}), \quad (191)$$

$$\mu = -\frac{1}{dn} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v} S_i(\mathbf{V}) \mathcal{B}_i(\mathbf{V}). \quad (192)$$

On constate que  $\mu \neq 0$ , mais pour des raisons différentes que dans le cas du gaz inélastique. En effet, dans ce dernier modèle  $\mu \neq 0$  si et seulement si le coefficient de restitution est strictement inférieur à l'unité. Or dans notre modèle d'annihilation probabiliste, la partie sphères dures est purement élastique. Par conséquent, la non-nullité de  $\mu$  est entièrement due à la dynamique d'annihilation. En effet, comme nous le verrons plus loin (cf. Eq. (235)), dans la limite du gaz de sphères dures  $p \rightarrow 0$  on a  $\mu = 0$ .

La première des Eqs. (139) est

$$-p \left( \xi_T^{(0)} T \partial_T + \xi_n^{(0)} n \partial_n + \frac{1}{2} \xi_T^{(0)} \right) \mathcal{A}_i + (J - p\Omega) \mathcal{A}_i - p \frac{1}{2} \xi_n^{(0)} \mathcal{B}_i = A_i, \quad (193)$$

que l'on intègre sur  $\mathbf{V}$  avec poids  $-1/d \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V})$  pour obtenir

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{d} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V}) \left[ -p \left( \xi_T^{(0)} T \partial_T \mathcal{A}_i + \xi_n^{(0)} n \partial_n \mathcal{A}_i + \frac{1}{2} \xi_T^{(0)} \mathcal{A}_i \right) \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{d} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V}) (J - p\Omega) \mathcal{A}_i - \frac{1}{d} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V}) \left[ -p \frac{1}{2} \xi_n^{(0)} \mathcal{B}_i \right] \right] \\ & \quad \quad \quad = -\frac{1}{d} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V}) A_i(\mathbf{V}) \quad (194) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \implies & -p \xi_T^{(0)} T \partial_T \left[ \underbrace{-\frac{1}{d} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V}) \mathcal{A}_i}_{\stackrel{(191)}{=} T\kappa} - p \xi_n^{(0)} n \partial_n \left[ \underbrace{-\frac{1}{d} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V}) \mathcal{A}_i}_{\stackrel{(191)}{=} T\kappa} \right] \right. \\ & \quad \left. - p \frac{1}{2} \xi_T^{(0)} \left[ \underbrace{-\frac{1}{d} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V}) \mathcal{A}_i}_{\stackrel{(191)}{=} T\kappa} \right] - p \frac{1}{2} \xi_n^{(0)} \left[ \underbrace{-\frac{1}{d} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V}) \mathcal{B}_i}_{\stackrel{(192)}{=} n\mu} \right] \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{d} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V}) \mathcal{A}_i \left[ \underbrace{\frac{\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V}) J \mathcal{A}_i}{\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V}) \mathcal{A}_i}}_{\stackrel{(191)}{=} T\kappa} - p \frac{\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V}) \Omega \mathcal{A}_i}{\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V}) \mathcal{A}_i} \right] \right] \\ & \quad \quad \quad \stackrel{\doteq \nu_\kappa}{=} \\ & \quad \quad \quad = -\frac{1}{d} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V}) A_i(\mathbf{V}) \quad (195) \end{aligned}$$

$$\implies -p\xi_T^{(0)}T\partial_T(T\kappa) - p\xi_n^{(0)}n\partial_n(T\kappa) - p\frac{1}{2}\xi_T^{(0)}T\kappa - p\frac{1}{2}\xi_n^{(0)}n\mu + T\kappa\nu_\kappa = -\frac{1}{d}\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V})A_i(\mathbf{V}). \quad (196)$$

A nouveau, on peut étudier la dépendance fonctionnelle de  $\kappa$  et  $\mu$  dans les champs hydrodynamiques. Le membre de droite de l'Eq. (196) donne :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} \underbrace{S_i(\mathbf{V})}_{\sim TV_i} \underbrace{A_i(\mathbf{V})}_{\sim V_i f^{(0)}} &\sim \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} T V_i^2 \frac{n}{T^{d/2}} \tilde{f}\left(\frac{V^2}{T}\right), \quad \mathbf{y} = \mathbf{V}/\sqrt{T}, \quad d\mathbf{y} = d\mathbf{V}/T^{d/2}, \\ &\sim \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} T^{d/2} T y^2 \frac{n}{T^{d/2}} \tilde{f}(y^2) \\ &\sim nT^2. \end{aligned} \quad (197)$$

Comme nous savons que  $\xi_T^{(0)} \sim nT^{1/2}$  et  $\xi_n^{(0)} \sim nT^{1/2}$ , alors on en déduit :

$$\xi_T^{(0)}T\kappa \sim nT^2 \implies nT^{1/2}T\kappa \sim nT^2 \implies T^{3/2}\kappa \sim T^2 \implies \kappa \sim T^{1/2}, \quad (198)$$

$$\xi_n^{(0)}n\mu \sim nT^2 \implies nT^{1/2}n\mu \sim nT^2 \implies nT^{1/2}\mu \sim T^2 \implies \mu \sim n^{-1}T^{3/2}. \quad (199)$$

Par conséquent :

$$T\partial_T(T\kappa) = cte T\partial_T(TT^{1/2}) = cte T\frac{3}{2}T^{1/2} = \frac{3}{2}T\kappa, \quad (200)$$

$$n\partial_n(T\kappa) = cte n\partial_n T^{3/2} = 0. \quad (201)$$

Insérant les Eqs. (200) et (201) dans (196) il vient :

$$\begin{aligned} \underbrace{-p\xi_T^{(0)}\frac{3}{2}T\kappa - p\frac{1}{2}\xi_T^{(0)}T\kappa - p\frac{1}{2}\xi_n^{(0)}n\mu + T\kappa\nu_\kappa}_{=-2p\xi_T^{(0)}T\kappa} &= -\frac{1}{d}\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V})A_i(\mathbf{V}) \\ \implies \left(-2p\xi_T^{(0)}T + T\nu_\kappa\right)\kappa &= \frac{1}{2}p\xi_n^{(0)}n\mu - \frac{1}{d}\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V})A_i(\mathbf{V}) \end{aligned} \quad (202)$$

$$\implies \boxed{\kappa = \frac{1}{T(\nu_\kappa - 2p\xi_T^{(0)})} \left[ \frac{1}{2}p\xi_n^{(0)}n\mu - \frac{1}{d}\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V})A_i(\mathbf{V}) \right]}. \quad (203)$$

Cette dernière expression diffère de celle obtenue pour le gaz granulaire par la présence du taux de déclin  $\xi_n^{(0)}$  [2]. Dans la limite  $p \rightarrow 0$  on obtient néanmoins bien les mêmes expressions (ou bien en posant  $\xi_n^{(0)} = 0$  et  $p = 1$ , ce qui dans ce dernier cas n'est qu'une analogie formelle car les systèmes décrits sont différents).

Utilisons à présent la seconde des Eqs. (139) :

$$-p\left(\xi_T^{(0)}T\partial_T + \xi_n^{(0)}n\partial_n + \xi_n^{(0)}\right)\mathcal{B}_i + (J - p\Omega)\mathcal{B}_i - p\xi_T^{(0)}\mathcal{A}_i = B_i, \quad (204)$$

que l'on intègre sur  $\mathbf{V}$  avec poids  $-1/d \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V})$  pour obtenir :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{d}\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V}) \left[ -p\left(\xi_T^{(0)}T\partial_T \mathcal{B}_i + \xi_n^{(0)}n\partial_n \mathcal{B}_i + \xi_n^{(0)}\mathcal{B}_i\right) \right] \\ -\frac{1}{d}\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V})(J - p\Omega)\mathcal{B}_i - \frac{1}{d}\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V}) \left[ -p\xi_T^{(0)}\mathcal{A}_i \right] \\ = -\frac{1}{d}\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V}) B_i(\mathbf{V}) \end{aligned} \quad (205)$$

$$\begin{aligned}
&\implies -p\xi_T^{(0)} T \partial_T \underbrace{\left[ -\frac{1}{d} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V}) \mathcal{B}_i \right]}_{\stackrel{(192)}{=} n\mu} - p\xi_n^{(0)} n \partial_n \underbrace{\left[ -\frac{1}{d} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V}) \mathcal{B}_i \right]}_{\stackrel{(192)}{=} n\mu} \\
&\quad - p\xi_n^{(0)} \underbrace{\left[ -\frac{1}{d} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V}) \mathcal{B}_i \right]}_{\stackrel{(192)}{=} n\mu} - p\xi_T^{(0)} \underbrace{\left[ -\frac{1}{d} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V}) \mathcal{A}_i \right]}_{\stackrel{(191)}{=} T\kappa} \\
&\underbrace{-\frac{1}{d} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V}) \mathcal{B}_i}_{\stackrel{(192)}{=} n\mu} \underbrace{\left[ \frac{\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V}) J \mathcal{B}_i}{\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V}) \mathcal{B}_i} - p \frac{\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V}) \Omega \mathcal{B}_i}{\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V}) \mathcal{B}_i} \right]}_{\doteq \nu_\mu} = -\frac{1}{d} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V}) B_i(\mathbf{V}) \quad (206)
\end{aligned}$$

$$\implies -p\xi_T^{(0)} T \partial_T (n\mu) - p\xi_n^{(0)} n \partial_n (n\mu) - p\xi_n^{(0)} n\mu - p\xi_T^{(0)} T\kappa + n\mu\nu_\mu = -\frac{1}{d} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V}) B_i(\mathbf{V}). \quad (207)$$

A nouveau, on peut utiliser la dépendance fonctionnelle dans les champs hydrodynamiques. On connaît toutes les dépendances, mais on peut néanmoins vérifier que ce qui a été trouvé est bien correct. Le membre de droite de l'Eq. (207) donne :

$$\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} \underbrace{S_i(\mathbf{V})}_{\sim TV_i} \underbrace{B_i(\mathbf{V})}_{\sim V_i f^{(0)}} \sim nT^2, \quad (208)$$

car il s'agit de la même dépendance que pour le cas précédent. Ainsi, comme  $\xi_T^{(0)} \sim nT^{1/2}$  et  $\xi_n^{(0)} \sim nT^{1/2}$ , il vient

$$\xi_n^{(0)} n\mu \sim nT^2 \implies nT^{1/2} n\mu \sim nT^2 \implies \mu \sim n^{-1} T^{3/2} \quad (209)$$

$$\xi_T^{(0)} T\kappa \sim nT^{1/2} \implies nT^{1/2} T\kappa \sim nT^2 \implies \kappa \sim T^{1/2}. \quad (210)$$

Ce sont bien les mêmes résultats que ceux des Eqs. (198) et (199). On a donc :

$$T \partial_T (n\mu) = cte T \partial_T (nn^{-1} T^{3/2}) = cte nn^{-1} \frac{3}{2} T^{3/2} = \frac{3}{2} n\mu, \quad (211)$$

$$n \partial_n (n\mu) = cte n \partial_n (nn^{-1} T^{3/2}) = 0. \quad (212)$$

Insérant les Eqs. (211) et (212) dans (207) il vient :

$$-p\xi_T^{(0)} \frac{3}{2} n\mu - p\xi_n^{(0)} n\mu - p\xi_T^{(0)} T\kappa + n\mu\nu_\mu = -\frac{1}{d} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V}) B_i(\mathbf{V}) \quad (213)$$

$$\implies \left( -\frac{3}{2} p\xi_T^{(0)} n - p\xi_n^{(0)} n + n\nu_\mu \right) \mu = p\xi_T^{(0)} T\kappa - \frac{1}{d} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V}) B_i(\mathbf{V}) \quad (214)$$

$$\implies \boxed{\mu = \frac{1}{n \left( \nu_\mu - \frac{3}{2} p\xi_T^{(0)} - p\xi_n^{(0)} \right)} \left[ p\xi_T^{(0)} T\kappa - \frac{1}{d} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V}) B_i(\mathbf{V}) \right]}. \quad (215)$$

A nouveau, dans la limite  $p \rightarrow 0$  (ou bien formellement avec  $p = 1$  et  $\xi_n^{(0)} = 0$ ) on retrouve l'expression du gaz élastique [2].

Les intégrales apparaissant dans les Eqs. (203) et (215) peuvent être simplifiées. Pour ceci, nous aurons d'abord besoin de la relation suivante. Nous savons que [5, 9]

$$a_2 = \frac{4}{d(d+2)} \langle c^4 \rangle - 1 = \frac{4}{d(d+2)} \int_{\mathbb{R}^d} dc c^4 \tilde{f}(c) - 1. \quad (216)$$

Avec  $\tilde{f}(c) = v_T^d f(v)/n$ ,  $v_T = \sqrt{2/\beta m}$ ,  $c^2 = \beta m V^2/2$ ,  $d\mathbf{c} = (\beta m/2)^{d/2} d\mathbf{V}$ , il vient :

$$a_2 = \frac{4}{d(d+2)} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} \left(\frac{\beta m}{2}\right)^{d/2} \left(\frac{\beta m}{2}\right)^2 V^4 \frac{1}{n} \left(\frac{2}{\beta m}\right)^{d/2} \tilde{f}(V) - 1 \quad (217)$$

$$= \frac{4}{d(d+2)} \left(\frac{\beta m}{2}\right)^2 \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} V^4 f(V) - 1. \quad (218)$$

Comme dans la méthode de Chapman-Enskog les moments de  $f$  sont ceux du premier ordre  $f^{(0)}$ , on a finalement :

$$a_2 = \frac{4}{d(d+2)} \left(\frac{\beta m}{2}\right)^2 \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} V^4 f^{(0)}(V) - 1. \quad (219)$$

Ainsi, avec

$$S_i(\mathbf{V}) = V_i \left( \frac{m}{2} V^2 - \frac{d+2}{2} k_B T \right), \quad (220)$$

$$A_i(\mathbf{V}) = \frac{V_i}{2} \frac{\partial}{\partial V_j} \left( V_j f^{(0)} \right) - \frac{k_B T}{m} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i} = \frac{V_i}{2} \left[ df^{(0)} + V_j \frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_j} \right] - \frac{k_B T}{m} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i}, \quad (221)$$

il vient

$$\begin{aligned} \frac{1}{dT} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V}) A_i(\mathbf{V}) &= \frac{1}{dT} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V}) \frac{V_i}{2} df^{(0)} \\ &+ \underbrace{\frac{1}{dT} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V}) \frac{V_i}{2} V_j \frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_j}}_{= \frac{1}{2dT} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V}) V_i V_j \frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_j}} - \underbrace{\frac{1}{dT} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V}) \frac{k_B T}{m} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i}}_{= -\frac{k_B T}{dTm} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V}) \frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i}} \\ &= -\frac{1}{2dT} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} \frac{\partial}{\partial V_j} [S_i(\mathbf{V}) V_i V_j] f^{(0)} + 0 = \frac{k_B T}{dTm} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} \frac{\partial S_i(\mathbf{V})}{\partial V_j} f^{(0)} + 0 \\ &= \frac{d}{2dT} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V}) f^{(0)} V_i - \frac{1}{2dT} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} f^{(0)} \underbrace{\frac{\partial}{\partial V_j} [S_i(\mathbf{V}) V_i V_j]}_{= \frac{\partial S_i(\mathbf{V})}{\partial V_j} V_i V_j + S_i(\mathbf{V}) V_j \delta_{ij} + S_i(\mathbf{V}) V_i} \\ &+ \frac{k_B T}{dTm} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} f^{(0)} \frac{\partial S_i(\mathbf{V})}{\partial V_i} \\ &= \frac{d}{2dT} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V}) f^{(0)} V_i - \frac{1}{2dT} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} f^{(0)} V_i V_j \frac{\partial S_i(\mathbf{V})}{\partial V_j} \\ &- \frac{1}{2dT} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} f^{(0)} S_i(\mathbf{V}) V_i - \frac{d}{2dT} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} f^{(0)} S_i(\mathbf{V}) V_i \\ &+ \frac{k_B T}{dTm} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} f^{(0)} \frac{\partial S_i(\mathbf{V})}{\partial V_i} \\ &= -\frac{1}{2dT} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} f^{(0)} S_i(\mathbf{V}) V_i - \frac{1}{2dT} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} f^{(0)} V_i V_j \frac{\partial S_i(\mathbf{V})}{\partial V_j} \\ &+ \frac{k_B T}{dTm} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} f^{(0)} \frac{\partial S_i(\mathbf{V})}{\partial V_i}. \quad (222) \end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_i(\mathbf{V})}{\partial V_j} &= \delta_{ij} \left( \frac{m}{2} V^2 - \frac{d+2}{2} k_B T \right) + V_i \frac{m}{2} \underbrace{\frac{\partial}{\partial V_j} V_k V_k}_{= 2V_k \delta_{kj}} \\ &= \delta_{ij} \left( \frac{m}{2} V^2 - \frac{d+2}{2} k_B T \right) + m V_i V_j, \quad (223) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S_i(\mathbf{V})}{\partial V_i} &= d \left( \frac{m}{2} V^2 - \frac{d+2}{2} k_B T \right) + V_i \frac{m}{2} \underbrace{\frac{\partial}{\partial V_i} V_k V_k}_{= 2V_k \delta_{ik}} \\
&= d \left( \frac{m}{2} V^2 - \frac{d+2}{2} k_B T \right) + m V^2 \\
&= m \frac{d+2}{2} V^2 - \frac{d(d+2)}{2} k_B T,
\end{aligned} \tag{224}$$

$$S_i(\mathbf{V}) V_i = V_i V_i \left( \frac{m}{2} V^2 - \frac{d+2}{2} k_B T \right) = \frac{m}{2} V^4 - \frac{d+2}{2} k_B T V^2, \tag{225}$$

$$\begin{aligned}
V_i V_j \frac{\partial S_i(\mathbf{V})}{\partial V_j} &= V_i V_j \delta_{ij} \left( \frac{m}{2} V^2 - \frac{d+2}{2} k_B T \right) + m V_i V_j V_i V_j \\
&= \frac{m}{2} V^4 - \frac{d+2}{2} k_B T V^2 + m V^4 \\
&= \frac{3}{2} m V^4 - \frac{d+2}{2} k_B T V^2.
\end{aligned} \tag{226}$$

Ainsi l'Eq. (222) devient

$$\begin{aligned}
\frac{1}{dT} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V}) A_i(\mathbf{V}) &= \frac{1}{2dT} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} f^{(0)} \left[ -\frac{m}{2} V^4 + \frac{d+2}{2} k_B T V^2 - \frac{3}{2} m V^4 + \frac{d+2}{2} k_B T V^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{2k_B T}{m} m \frac{d+2}{2} V^2 - \frac{2k_B T}{m} \frac{d(d+2)}{2} k_B T \right] \\
&= \frac{1}{2dT} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} f^{(0)} [-2mV^4] + \frac{1}{2dT} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} f^{(0)} [2(d+2)k_B T V^2] \\
&\quad + \frac{1}{2dT} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} f^{(0)} \left[ -d(d+2) \frac{(k_B T)^2}{m} \right] \\
&= -\frac{m}{dT} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} V^4 f^{(0)} + \frac{d+2}{d} k_B \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} V^2 f^{(0)} \\
&\quad - \frac{d+2}{2T} \frac{(k_B T)^2}{m} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} f^{(0)} \\
&= -\frac{m}{dT} \frac{d(d+2)}{4} \left( \frac{2}{\beta m} \right)^2 n \underbrace{\left[ \frac{4}{d(d+2)} \left( \frac{\beta m}{2} \right)^2 \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v} V^4 f^{(0)} - 1 + 1 \right]}_{\stackrel{(219)}{=} a_2}} \\
&\quad + \frac{d+2}{d} k_B \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} V^2 f^{(0)} - \frac{d+2}{2T} \frac{(k_B T)^2}{m} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} f^{(0)} \\
&= -\frac{m}{dT} d(d+2) \frac{n}{\beta^2 m^2} \frac{1}{2} [2a_2 + 2] + \frac{d+2}{d} k_B \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} V^2 f^{(0)} \\
&\quad - \frac{d+2}{2T} \frac{(k_B T)^2}{m} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} f^{(0)}}_{= n \text{ car } \langle c^0 \rangle = 1} \\
&= -\frac{d+2}{2} \frac{nk_B}{m\beta} [2a_2 + 2] - \frac{d+2}{2} \frac{n}{k_B} m\beta \\
&\quad + \frac{d+2}{d} k_B \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{c} \left( \frac{\beta m}{2} \right)^{-d/2} c^2 \left( \frac{\beta m}{2} \right)^{-1} \frac{n}{v_T^d} \tilde{f}^{(0)}(c)}_{\substack{v_T = \sqrt{2/\beta m} \frac{2n}{\beta m} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{c} c^2 \tilde{f}^{(0)}(c) \\ = \langle c^2 \rangle = d/2}} \\
&= -\frac{d+2}{2} \frac{nk_B}{m\beta} [2a_2 + 2] - \underbrace{\frac{d+2}{2} \frac{nk_B}{m\beta} + \frac{d+2}{d} k_B \frac{2n}{\beta m} \frac{d}{2}}_{= \frac{d+2}{2} \frac{nk_B}{m\beta}} \\
&= -\frac{d+2}{2} \frac{nk_B}{m\beta} [2a_2 + 1]. \tag{227}
\end{aligned}$$

Dans la littérature, on note parfois  $c^* = 2a_2$ . Pour  $d = 3$  on retrouve bien le résultat de la littérature [2]. Le même type de calcul avec

$$B_i(\mathbf{V}) = -V_i f^{(0)} - \frac{k_B T}{m} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i} \tag{228}$$

donne

$$\begin{aligned}
\frac{1}{dn} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V}) B_i(\mathbf{V}) &= -\frac{1}{dn} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V}) V_i f^{(0)} - \frac{1}{dn} \frac{k_B T}{m} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V}) \frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i}}_{-\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} \frac{\partial S_i(\mathbf{V})}{\partial V_i} f^{(0)} + S_i(\mathbf{V}) f^{(0)} \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0} \\
&\stackrel{(224)}{=} \stackrel{(225)}{=} -\frac{1}{dn} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} f^{(0)} \left[ \frac{m}{2} V^4 - \frac{d+2}{2} k_B T V^2 \right] \\
&\quad + \frac{1}{dn} \frac{k_B T}{m} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} f^{(0)} \left[ m \frac{d+2}{2} V^2 - \frac{d(d+2)}{2} k_B T \right] \\
&= -\frac{1}{dn} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} \frac{m}{2} V^4 f^{(0)} + \frac{T}{n} \frac{d+2}{d} k_B \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} f^{(0)} V^2 \\
&\quad + \frac{T}{n} \frac{k_B}{dm} m \frac{d+2}{2} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} f^{(0)} V^2 - \frac{1}{dn} \frac{k_B T}{m} \frac{d(d+2)}{2} k_B T \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} f^{(0)} \\
&= -\frac{m}{2dn} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} V^4 f^{(0)} + \frac{T}{n} \frac{d+2}{d} k_B \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} \frac{m}{2} V^2 f^{(0)}}_{= \frac{2n}{\beta m} \frac{d}{2}} \\
&\quad - \frac{T}{n} \frac{k_B^2 T (d+2)}{2m} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} f^{(0)}}_{=n} \\
&= -\frac{m}{2dn} \frac{d(d+2)}{4} \left( \frac{2}{\beta m} \right)^2 n \underbrace{\left[ \frac{4}{d(d+2)} \left( \frac{\beta m}{2} \right)^2 \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} V^4 f^{(0)} - 1 + 1 \right]}_{=a_2} \\
&\quad + \frac{T}{n} \frac{d+2}{d} k_B \frac{dn}{\beta m} - \frac{k_B n}{2m\beta} (d+2) \frac{T}{n} \\
&= -\frac{d+2}{2} \frac{1}{\beta^2 m} \frac{1}{2} [2a_2 + 2] + \frac{d+2}{2} \frac{1}{\beta^2 m} 2 - \frac{d+2}{2} \frac{1}{\beta^2 m} \\
&= -\frac{d+2}{4} \frac{1}{\beta^2 m} 2a_2. \tag{229}
\end{aligned}$$

Ainsi, en résumé, des Eqs. (203), (215), (227), et (229) nous obtenons :

$$\kappa = \frac{1}{\nu_\kappa - 2p\xi_T^{(0)}} \left[ \frac{1}{2} p\xi_n^{(0)} \frac{n}{T} \mu + \frac{d+2}{2} \frac{nk_B}{m\beta} (2a_2 + 1) \right], \tag{230}$$

$$\mu = \frac{1}{\nu_\mu - \frac{3}{2} p\xi_T^{(0)} - p\xi_n^{(0)}} \left[ p\xi_T^{(0)} \frac{T}{n} \kappa + \frac{d+2}{4} \frac{1}{\beta^2 m} 2a_2 \right]. \tag{231}$$

A nouveau, pour  $d = 3$  on retrouve le résultat de la littérature [2].

Introduisons la conductivité thermique  $\kappa_0$  du gaz de sphères dures  $p = 0$ , définie par [13]

$$\kappa_0 = \frac{d(d+2)}{2(d-1)} \frac{k_B}{m} \eta_0, \quad \eta_0 = \frac{p^{(0)}}{\nu_0}, \quad p^{(0)} = nk_B T, \tag{232}$$

et définissons les grandeurs  $\nu_\mu^* = \nu_\mu/\nu_0$ ,  $\nu_\kappa^* = \nu_\kappa/\nu_0$ ,  $\xi_T^{(0)*} = \xi_T^{(0)}/\nu_0$ ,  $\xi_n^{(0)*} = \xi_n^{(0)}/\nu_0$ , alors :

$$\begin{aligned}
\mu^* \doteq \frac{n\mu}{T\kappa_0} &= \frac{n}{T} \frac{2(d-1)}{d(d+2)} \frac{m}{k_B} \frac{\nu_0}{p^{(0)}} \frac{1}{\nu_\mu - \frac{3}{2}p\xi_T^{(0)} - p\xi_n^{(0)}} \left[ p\xi_T^{(0)} \frac{T}{n} \kappa + \frac{d+2}{4} \frac{1}{\beta^2 m} 2a_2 \right] \\
&= \frac{2}{2\nu_\mu^* - 3p\xi_T^{(0)*} - 2p\xi_n^{(0)*}} \left[ p \frac{2(d-1)}{d(d+2)} \frac{m}{k_B} \frac{1}{p^{(0)}} \frac{d(d+2)}{2(d-1)} \frac{k_B}{m} \frac{p^{(0)}}{\nu_0} \nu_0 \xi_T^{(0)*} \frac{\kappa}{\kappa_0} \right. \\
&\quad \left. + \frac{n}{T} \frac{2(d-1)}{d(d+2)} \frac{m}{k_B} \frac{1}{nk_B T} \frac{d+2}{4} \frac{k_B^2 T^2}{m} 2a_2 \right] \\
&= \frac{2}{2\nu_\mu^* - 3p\xi_T^{(0)*} - 2p\xi_n^{(0)*}} \left[ p\xi_T^{(0)*} \frac{\kappa}{\kappa_0} + \frac{d-1}{2d} 2a_2 \right], \tag{233}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\kappa^* \doteq \frac{\kappa}{\kappa_0} &= \frac{2(d-1)}{d(d+2)} \frac{m}{k_B} \frac{\nu_0}{p^{(0)}} \frac{1}{\nu_\kappa - 2p\xi_T^{(0)}} \left[ \frac{1}{2} p\xi_n^{(0)} \frac{n}{T} \mu + \frac{d+2}{2} \frac{nk_B}{m\beta} (2a_2 + 1) \right] \\
&= \frac{1}{\nu_\kappa^* - 2p\xi_T^{(0)*}} \left[ p \frac{1}{2} \frac{2(d-1)}{d(d+2)} \frac{m}{k_B} \frac{1}{p^{(0)}} \frac{d(d+2)}{2(d-1)} \frac{k_B}{m} \frac{p^{(0)}}{\nu_0} \nu_0 \xi_n^{(0)*} \frac{n\mu}{T\kappa_0} \right. \\
&\quad \left. + \frac{d+2}{2} \frac{nk_B}{m} k_B T \frac{2(d-1)}{d(d+2)} \frac{m}{k_B} \frac{1}{nk_B T} (2a_2 + 1) \right] \\
&= \frac{1}{\nu_\kappa^* - 2p\xi_T^{(0)*}} \left[ \frac{1}{2} p\xi_n^{(0)*} \frac{n\mu}{T\kappa_0} + \frac{d-1}{d} (2a_2 + 1) \right]. \tag{234}
\end{aligned}$$

Résumons ce que l'on a obtenu :

$$\begin{aligned}
\eta^* &= \frac{\eta}{\eta_0} = \frac{1}{\nu_\eta^* - \frac{1}{2}p\xi_T^{(0)*}}, \\
\kappa^* &= \frac{\kappa}{\kappa_0} = \frac{1}{\nu_\kappa^* - 2p\xi_T^{(0)*}} \left[ \frac{1}{2} p\xi_n^{(0)*} \mu^* + \frac{d-1}{d} (2a_2 + 1) \right], \\
\mu^* &= \frac{n\mu}{T\kappa_0} = \frac{2}{2\nu_\mu^* - 3p\xi_T^{(0)*} - 2p\xi_n^{(0)*}} \left[ p\xi_T^{(0)*} \kappa^* + \frac{d-1}{2d} 2a_2 \right], \\
\nu_\eta^* &= \frac{\nu_\eta}{\nu_0}, \quad \nu_\kappa^* = \frac{\nu_\kappa}{\nu_0}, \quad \nu_\mu^* = \frac{\nu_\mu}{\nu_0}, \quad \xi_T^{(0)*} = \frac{\xi_T^{(0)}}{\nu_0}, \quad \xi_n^{(0)*} = \frac{\xi_n^{(0)}}{\nu_0}, \\
\kappa_0 &= \frac{d(d+2)}{2(d-1)} \frac{k_B}{m} \eta_0, \quad \eta_0 = \frac{p^{(0)}}{\nu_0}, \quad p^{(0)} = nk_B T, \quad \eta_0 = \frac{d+2}{8} \frac{\Gamma(d/2)}{\pi^{(d-1)/2}} \frac{\sqrt{mk_B T}}{\sigma^{d-1}}, \\
\nu_\kappa &= \frac{\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V})(J - p\Omega) \mathcal{A}_i}{\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V}) \mathcal{A}_i}, \quad \nu_\mu = \frac{\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V})(J - p\Omega) \mathcal{B}_i}{\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V}) \mathcal{B}_i}, \\
\nu_\eta &= \frac{\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} D_{ij}(\mathbf{V})(J - p\Omega) \mathcal{C}_{ij}}{\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} D_{ij}(\mathbf{V}) \mathcal{C}_{ij}}.
\end{aligned} \tag{235}$$

A nouveau, on peut constater que dans la limite  $p \rightarrow 0$  on retrouve les résultats connus du cas élastique (ou bien avec l'analogie formelle  $p = 1$  et  $\xi_n^{(0)} = 0$ ) et ceci aussi bien en 3 dimensions [2] qu'en dimension arbitraire [14]. En particulier, nous avons discuté le fait que la non-nullité de  $\mu$  dans notre théorie était entièrement due à la dynamique d'annihilation. Nous vérifions ainsi, comme  $a_2(p = 0) = 0$  (cf. Eq. (241)), que dans la limite du gaz élastique  $\mu^*(p = 0) = 0$ , ce qui confirme notre interprétation. L'évaluation des relations pour  $\nu_\eta$ ,  $\nu_\kappa$ , et  $\nu_\mu$  fait intervenir des relations intégrales qu'il n'est pas possible de calculer sans approximation supplémentaire.

### 3.3.2 Développement en polynômes de Sonine : taux de déclin à l'ordre 0

Pour poursuivre, il est nécessaire de disposer de l'expression explicite pour  $f^{(0)}$  permettant de calculer les taux de déclin  $\xi_T^{(0)}$  et  $\xi_n^{(0)}$  ainsi que  $\nu_\eta$ ,  $\nu_\kappa$ , et  $\nu_\mu$ . Dans le contexte du développement de Sonine à l'ordre  $a_2$ , nous avons trouvé [15] :

$$\tilde{f}^{(0)}(c) = \mathcal{M}(c) [1 + a_2 S_2(c^2)], \quad (236)$$

$$\mathcal{M}(c) = \frac{1}{\pi^{d/2}} e^{-c^2}, \quad (237)$$

$$S_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{d+2}{2}x + \frac{d(d+2)}{8}, \quad (238)$$

$$\mathbf{c} = \frac{\mathbf{V}}{v_T}, \quad (239)$$

$$v_T = \sqrt{\frac{2}{m\beta}}, \quad (240)$$

$$a_2 = 8 \frac{3 - 2\sqrt{2}}{4d + 6 - \sqrt{2} + \frac{1-p}{p} 8\sqrt{2}(d-1)}, \quad (241)$$

$$f^{(0)}(\mathbf{V}) = \frac{n}{v_T^d} \tilde{f}^{(0)}(c). \quad (242)$$

On a donc :

$$f^{(0)}(V) = \frac{n}{v_T^d} \mathcal{M}\left(\frac{V}{v_T}\right) \left[1 + a_2 \left\{ \frac{1}{2} \frac{V^4}{v_T^4} - \frac{d+2}{2} \frac{V^2}{v_T^2} + \frac{d(d+2)}{8} \right\}\right]. \quad (243)$$

Ceci permet de calculer les taux de déclin, en négligeant les termes non linéaires en  $a_2$ . Pour cela, on aura besoin du résultat suivant (déjà établi dans [5]).

**Lemme 3.2** *Soit*

$$M_{np}^0 = \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\mathbf{c}_{12} d\mathbf{C} e^{-c_{12}^2/2} e^{-2C^2} c_{12}^n C^p, \quad (244)$$

$$M_{np} = \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\mathbf{c}_{12} d\mathbf{C} e^{-c_{12}^2/2} e^{-2C^2} c_{12}^n C^p \left[1 + a_2 \left\{ C^4 + \frac{1}{16} c_{12}^4 + \frac{d+2}{2d} C^2 c_{12}^2 - (d+2)C^2 - \frac{d+2}{4} c_{12}^2 + \frac{d(d+2)}{4} \right\}\right], \quad (245)$$

alors

$$M_{np}^0 = \pi^d 2^{(n-p)/2} \frac{\Gamma[(d+n)/2] \Gamma[(d+p)/2]}{\Gamma(d/2)^2}, \quad (246)$$

$$\frac{M_{np}}{M_{np}^0} = 1 + \frac{a_2}{16d} [d(n^2 + p^2) - 2d(n+p) + 2np(d+2)]. \quad (247)$$

**Preuve.** pour calculer ces intégrales, on utilise la relation générale

$$\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{x} |\mathbf{x}|^n e^{-\alpha x^2} = \frac{\pi^{d/2}}{\alpha^{(d+n)/2}} \frac{\Gamma[(d+n)/2]}{\Gamma(d/2)}. \quad (248)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} M_{np}^0 &= \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{c}_{12} c_{12}^n e^{-c_{12}^2/2}}_{=\frac{\pi^{d/2}}{(\frac{1}{2})^{(d+n)/2}} \frac{\Gamma[(d+n)/2]}{\Gamma(d/2)}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{C} C^p e^{-2C^2}}_{=\frac{\pi^{d/2}}{2^{(d+p)/2}} \frac{\Gamma[(d+p)/2]}{\Gamma(d/2)}} \\ &= \pi^d 2^{(n-p)/2} \frac{\Gamma[(d+n)/2] \Gamma[(d+p)/2]}{\Gamma(d/2)^2}. \end{aligned} \quad (249)$$

Donc :

$$M_{np} = M_{np}^0 + a_2 \left( M_{n,p+4}^0 + \frac{1}{16} M_{n+4,p}^0 + \frac{d+2}{2d} M_{n+2,p+2}^0 - (d+2) M_{n,p+2}^0 - \frac{d+2}{4} M_{n+2,p}^0 + \frac{d(d+2)}{4} M_{np}^0 \right), \quad (250)$$

avec

$$\begin{aligned} M_{n+4,p}^0 &= M_{np}^0 \frac{d+n+2}{2} \frac{d+2}{2} 2^{4/2} = (d+n)(d+n+2) M_{np}^0, \\ M_{n+2,p+2}^0 &= M_{np}^0 \frac{d+n}{2} 2^{2/2} \frac{d+p}{2} 2^{-2/2} = \frac{(d+n)(d+p)}{4} M_{np}^0, \\ M_{n+2,p}^0 &= M_{np}^0 \frac{d+n}{2} 2^{2/2} = (d+n) M_{np}^0, \\ M_{n,p+2}^0 &= M_{np}^0 \frac{d+p}{2} 2^{-2/2} = \frac{d+p}{4} M_{np}^0. \end{aligned} \quad (251)$$

Les Eqs. (251) dans (250) donne

$$\begin{aligned} \frac{M_{np}}{M_{np}^0} &= 1 + a_2 \left[ \frac{(d+p)(d+p+2)}{16} + \frac{(d+n)(d+n+2)}{16} + \frac{d+2}{2d} \frac{(d+n)(d+p)}{4} \right. \\ &\quad \left. - (d+2) \frac{d+p}{4} - \frac{d+2}{4} (d+n) + \frac{d(d+2)}{4} \right], \\ &= 1 + \frac{a_2}{16d} \left[ d(d+p)(d+p+2) + d(d+n)(d+n+2) + 2d(d+2)(d+n)(d+p) \right. \\ &\quad \left. - 4d(d+2)(d+p) - 4d(d+2)(d+p) - 4d(d+2)(d+n) + 4d^2(d+2) \right] \\ &\quad \vdots \\ &= 1 + \frac{a_2}{16d} [d(n^2 + p^2) - 2d(n+p) + 2np(d+2)], \end{aligned} \quad (252)$$

ce qui est bien le résultat cherché et par conséquent achève la preuve. ■

### 3.3.2.1 Taux de déclin de densité $\xi_n^{(0)}$

$$\begin{aligned} \xi_n^{(0)*} &= \frac{\xi_n^{(0)}}{\nu_0} = \frac{1}{\nu_0} \frac{1}{n} \omega [f^{(0)}, f^{(0)}] \\ &= \frac{\eta_0}{p^{(0)}} \frac{1}{n} \sigma^{d-1} \beta_1 \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\mathbf{V}_1 d\mathbf{V}_2 |\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2| f^{(0)}(\mathbf{V}_1) f^{(0)}(\mathbf{V}_2) \\ &= \frac{\eta_0}{p^{(0)}} \frac{1}{n} \sigma^{d-1} \frac{\beta_1}{\pi^d} \frac{n^2}{v_T^{2d}} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V}_1 d\mathbf{V}_2 |\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2| e^{-V_1^2/v_T^2} e^{-V_2^2/v_T^2} \times \\ &\quad \times \left[ 1 + a_2 \left\{ \frac{1}{2} \frac{V_1^4}{v_T^4} - \frac{d+2}{2} \frac{d+2}{2} \frac{V_1^2}{v_T^2} + \frac{d(d+2)}{8} \right\} \right] \times \\ &\quad \times \left[ 1 + a_2 \left\{ \frac{1}{2} \frac{V_2^4}{v_T^4} - \frac{d+2}{2} \frac{d+2}{2} \frac{V_2^2}{v_T^2} + \frac{d(d+2)}{8} \right\} \right]. \end{aligned} \quad (253)$$

Soit  $\mathbf{c}_1 = \mathbf{V}_1/v_T$ ,  $\mathbf{c}_2 = \mathbf{V}_2/v_T$ ,  $d\mathbf{c}_1 d\mathbf{c}_2 = d\mathbf{V}_1 d\mathbf{V}_2/v_T^{2d}$ , alors :

$$\begin{aligned}
\xi_n^{(0)*} &= \frac{\eta_0}{p^{(0)}} \frac{1}{n} \sigma^{d-1} \frac{\beta_1}{\pi^d} \frac{n^2}{v_T^{2d}} v_T^{2d} \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\mathbf{c}_1 d\mathbf{c}_2 v_T |\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2| e^{-c_1^2 - c_2^2} \times \\
&\quad \times \left[ 1 + a_2 \left\{ \frac{1}{2} c_1^4 - \frac{d+2}{2} c_1^2 + \frac{d(d+2)}{8} \right\} \right] \left[ 1 + a_2 \left\{ \frac{1}{2} c_2^4 - \frac{d+2}{2} c_2^2 + \frac{d(d+2)}{8} \right\} \right] \\
&= \frac{\eta_0}{p^{(0)}} \frac{1}{n} \sigma^{d-1} \frac{\beta_1}{\pi^d} \frac{n^2}{v_T^{2d}} v_T^{2d} \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\mathbf{c}_1 d\mathbf{c}_2 v_T |\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2| e^{-c_1^2 - c_2^2} \times \\
&\quad \times \left[ 1 + a_2 \left\{ \frac{1}{2} (c_1^4 + c_2^4) - \frac{d+2}{2} (c_1^2 + c_2^2) + \frac{d(d+2)}{4} \right\} \right] + \mathcal{O}(a_2^2). \quad (254)
\end{aligned}$$

Pour calculer cette intégrale, il est nécessaire de passer dans les coordonnées du “centre de masse” et de la vitesse relative :

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{c}_{12} &= \mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2 \\ \mathbf{C} &= \frac{1}{2}(\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2) \end{aligned} \right\} \implies \begin{cases} \mathbf{c}_1 &= \mathbf{C} + \frac{1}{2}\mathbf{c}_{12} \\ \mathbf{c}_2 &= \mathbf{C} - \frac{1}{2}\mathbf{c}_{12} \end{cases} \quad (255)$$

$$d\mathbf{c}_1 d\mathbf{c}_2 = J d\mathbf{c}_{12} d\mathbf{C} \quad (256)$$

$$J = \left| \det \begin{pmatrix} \partial_{\mathbf{c}_1} \mathbf{c}_{12} & \partial_{\mathbf{c}_2} \mathbf{c}_{12} \\ \partial_{\mathbf{c}_1} \mathbf{C} & \partial_{\mathbf{c}_2} \mathbf{C} \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} \mathbb{1}_d & -\mathbb{1}_d \\ \frac{1}{2}\mathbb{1}_d & \frac{1}{2}\mathbb{1}_d \end{pmatrix} \right| = 1. \quad (257)$$

On a aussi :

$$\mathbf{c}_1^2 + \mathbf{c}_2^2 = \dots = 2C^2 + \frac{1}{2}c_{12}^2, \quad (258)$$

$$\mathbf{c}_1^4 + \mathbf{c}_2^4 = \dots = 2C^4 + \frac{1}{8}c_{12}^4 + C^2 c_{12}^2 + 2(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})^2. \quad (259)$$

On peut simplifier le terme  $\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}$  grâce à l’isotropie. En effet, si en général  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$  et que l’on intègre  $(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2$  sur  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  avec poids symétrique sur un domaine symétrique, alors :

$$\begin{aligned}
(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2 &= \sum_{i,j=1}^d x_i x_j y_i y_j \delta_{ij} + \underbrace{\sum_{i,j=1}^d x_i x_j y_i y_j (1 - \delta_{ij})}_{\substack{\text{moments impairs :} \\ \text{contribution nulle}}} \\
&= \sum_{i=1}^d x_i^2 y_i^2 \\
&\stackrel{\text{isotropie}}{=} \sum_{i=1}^d x_i^2 \frac{1}{d} \sum_{j=1}^d y_j^2 \\
&= \frac{1}{d} \mathbf{x}^2 \mathbf{y}^2. \quad (260)
\end{aligned}$$

Les égalités ci-dessus sont valables s’il y a intégration sur  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$ . On a donc  $(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})^2 = C^2 c_{12}^2/d$ , et l’Eq. (259) devient :

$$\mathbf{c}_1^4 + \mathbf{c}_2^4 = 2C^4 + \frac{1}{8}c_{12}^4 + \frac{d+2}{d} C^2 c_{12}^2. \quad (261)$$

Insérant les Eqs. (255), (257), (258), et (261) dans (254) il vient :

$$\begin{aligned}
\xi_n^{(0)*} &= \frac{\eta_0}{p^{(0)}} \sigma^{d-1} \frac{\beta_1}{\pi^d} n v_T \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\mathbf{C} d\mathbf{c}_{12} |c_{12}| e^{-2C^2} e^{-c_{12}^2/2} \left[ 1 + a_2 \left\{ C^4 + \frac{1}{16} c_{12}^4 + \frac{d+2}{2d} C^2 c_{12}^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - (d+2) C^2 - \frac{d+2}{4} c_{12}^2 + \frac{d(d+2)}{4} \right\} \right] \\
&= \frac{\eta_0}{p^{(0)}} \sigma^{d-1} \frac{\beta_1}{\pi^d} n v_T M_{10} \\
&\stackrel{(247)}{=} \frac{\eta_0}{p^{(0)}} \sigma^{d-1} \frac{\beta_1}{\pi^d} n v_T M_{10}^0 \left[ 1 + \frac{a_2}{16d} \{d(1+0) - 2d(1+0) + 0\} \right] \\
&= \frac{\eta_0}{p^{(0)}} \sigma^{d-1} \frac{\beta_1}{\pi^d} n v_T M_{10}^0 \left[ 1 - \frac{1}{32} 2a_2 \right] \\
&= \frac{d+2}{8} \frac{\Gamma(d/2)}{\pi^{(d-1)/2}} \frac{\sqrt{m k_B T}}{\sigma^{d-1}} \frac{1}{\pi^d} \frac{1}{n k_B T} \sigma^{d-1} \frac{\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma[(d+1)/2]} n \sqrt{\frac{2k_B T}{m}} \pi^d 2^{1/2} \times \\
&\quad \times \frac{\Gamma[(d+1)/2] \Gamma(d/2)}{\Gamma(d/2)^2} \left( 1 - \frac{1}{32} 2a_2 \right) \\
&= \frac{d+2}{8} 2 \left( 1 - \frac{1}{32} 2a_2 \right). \tag{262}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\xi_n^{(0)*} = \frac{d+2}{4} \left( 1 - \frac{1}{32} 2a_2 \right)}. \tag{263}$$

**3.3.2.2 Taux de déclin de l'énergie  $\xi_T^{(0)}$**  De façon similaire

$$\begin{aligned}
\xi_T^{(0)*} &= \frac{\xi_T^{(0)}}{\nu_0} = \frac{1}{\nu_0} \frac{1}{n} \frac{m}{k_B T d} \omega \left[ f^{(0)}, V^2 f^{(0)} \right] - \underbrace{\frac{1}{\nu_0} \frac{1}{n} \omega \left[ f^{(0)}, f^{(0)} \right]}_{= \xi_n^{(0)*}} \\
&= \frac{\eta^{(0)}}{p^{(0)}} \frac{m}{n k_B T d} \sigma^{d-1} \beta_1 \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\mathbf{V}_1 d\mathbf{V}_2 |\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2| f^{(0)}(\mathbf{V}_1) V_1^2 f^{(0)}(\mathbf{V}_2) - \xi_n^{(0)*} \\
&= \frac{\eta^{(0)}}{p^{(0)}} \frac{m}{n k_B T d} \sigma^{d-1} \beta_1 \frac{n^2}{v_T^{2d}} \frac{1}{\pi^d} \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\mathbf{V}_1 d\mathbf{V}_2 |\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2| e^{-V_1^2/v_T^2} e^{-V_2^2/v_T^2} V_1^2 \times \\
&\quad \times \left[ 1 + a_2 S_2 \left( \frac{V_1^2}{v_T^2} \right) \right] \left[ 1 + a_2 S_2 \left( \frac{V_2^2}{v_T^2} \right) \right] - \xi_n^{(0)*} \\
&= \frac{\eta^{(0)}}{p^{(0)}} \frac{m}{n k_B T d} \sigma^{d-1} \beta_1 \frac{n^2}{v_T^{2d}} \frac{1}{\pi^d} \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\mathbf{c}_1 d\mathbf{c}_2 v_T^{2d} v_T |\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2| v_T^2 c_1^2 e^{-c_1^2 - c_2^2} \times \\
&\quad \times \left[ 1 + a_2 \{ S_2(c_1^2) + S_2(c_2^2) \} \right] - \xi_n^{(0)*} + \mathcal{O}(a_2^2). \tag{264}
\end{aligned}$$

A nouveau, on passe dans les coordonnées du centre de masse, avec :

$$\mathbf{c}_1^2 = \left( \mathbf{C} + \frac{1}{2} \mathbf{c}_{12} \right)^2 = C^2 + \frac{1}{4} c_{12}^2 + 2(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}), \tag{265}$$

or comme  $(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})$  engendre des moments impairs, la contribution de ce terme sera nulle. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\xi_T^{(0)*} &= \frac{\eta^{(0)}}{p^{(0)}} \frac{m}{nk_B T d} \sigma^{d-1} \beta_1 \frac{n}{\pi^d} v_T^3 \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\mathbf{c}_{12} d\mathbf{C} \left( |\mathbf{c}_{12}| C^2 + \frac{1}{4} |\mathbf{c}_{12}|^3 \right) e^{-2C^2} e^{-c_{12}^2/2} \times \\
&\quad \times \left[ 1 + a_2 \left\{ C^4 + \frac{1}{16} c_{12}^4 + \frac{d+2}{2d} C^2 c_{12}^2 - (d+2) C^2 - \frac{d+2}{4} c_{12}^2 + \frac{d(d+2)}{4} \right\} \right] - \xi_n^{(0)*} \\
&= \frac{\eta^{(0)}}{p^{(0)}} \frac{m}{nk_B T d} \sigma^{d-1} \beta_1 \frac{n}{\pi^d} v_T^3 \left[ M_{12} + \frac{1}{4} M_{30} \right] - \xi_n^{(0)*} \\
&= \frac{\eta^{(0)}}{p^{(0)}} \frac{m}{nk_B T d} \sigma^{d-1} \beta_1 \frac{n}{\pi^d} v_T^3 \left[ M_{12}^0 \left\{ 1 + \frac{a_2}{16d} \underbrace{\left( d(1+4) - 2d(1+2) + 4(d+2) \right)}_{=3d+8} \right\} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4} M_{30}^0 \left\{ 1 + \frac{a_2}{16d} \underbrace{\left( d(9+0) - 2d(3+0) + 0 \right)}_{=3d} \right\} \right] - \xi_n^{(0)*} \\
&= \frac{d+2}{8} \frac{\Gamma(d/2)}{\pi^{(d-1)/2}} \frac{\sqrt{mk_B T}}{\sigma^{d-1}} \frac{1}{nk_B T} \frac{m}{k_B T d} \sigma^{d-1} \frac{\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma[(d+1)/2]} \frac{n}{\pi^d} \left( \frac{2k_B T}{m} \right)^{3/2} \times \\
&\quad \times \left[ \pi^{d/2} 2^{(1-2)/2} \frac{\Gamma[(d+1)/2] \Gamma[(d+2)/2]}{\Gamma(d/2)^2} \left\{ 1 + \frac{a_2}{16d} (3d+8) \right\} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4} \pi^{d/2} 2^{3/2} \frac{\Gamma[(d+3)/2] \Gamma(d/2)}{\Gamma(d/2)^2} \left\{ 1 + \frac{a_2}{16d} 3d \right\} \right] - \xi_n^{(0)*} \\
&= \frac{d+2}{8d} \left[ d + \frac{3d+8}{16} a_2 + d + \frac{3d}{16} a_2 + 1 + \frac{3}{16} a_2 \right] - \frac{d+2}{8} \left[ 2 - \frac{2}{16} a_2 \right], \\
&\quad \Rightarrow \boxed{\xi_T^{(0)*} = \frac{d+2}{8d} \left[ 1 + 2a_2 \frac{8d+11}{32} \right]}. \tag{266}
\end{aligned}$$

Les deux taux  $\xi_n^{(0)*}$  et  $\xi_T^{(0)*}$  n'ont pas d'équivalent dans la littérature, ce qui aurait permis une vérification dans certains cas limites.

### 3.3.3 Développement en polynômes de Sonine : distribution $f^{(1)}$

Ayant les taux de déclin, il reste à évaluer les fonctions  $\nu_\eta^*$ ,  $\nu_\kappa^*$ , et  $\nu_\mu^*$ . Ceci ne peut être réalisé analytiquement en toute généralité car  $\mathcal{A}_i$ ,  $\mathcal{B}_i$ , et  $\mathcal{C}_{ij}$ , définissant  $f^{(1)}$ , sont des fonctions inconnues. On développe ainsi ces dernières fonctions en polynômes de Sonine, ne gardant que le premier terme de contribution non nulle.

Si on définit les polynômes de Sonine généralisés par [10]

$$S_l^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n (-x)^k \frac{(n+l)!}{(l+k)!(n-k)!k!}, \tag{267}$$

alors  $\mathbf{S}(\mathbf{V}) = -S_{3/2}^{(1)}(V^2/v_T^2) \mathbf{V}^{1/\beta}$ , et  $\mathbf{D}(\mathbf{V}) = m S_{5/2}^{(0)}(\mathbf{V}\mathbf{V} - V^2/d)$ . Il est d'usage de développer  $\mathcal{A}_i$ ,  $\mathcal{B}_i$ , et  $\mathcal{C}_{ij}$  dans les polynômes de Sonine, et de ne garder que la première contribution non nulle. Cette approximation livre néanmoins d'excellents résultats [2, 12]. A titre d'illustration, prenons l'exemple de  $\mathcal{A}$ . Plus précisément, on réalise un développement de  $\mathcal{A}$  dans la base de fonctions propres de l'opérateur de collision linéaire  $L_c$  (défini par l'Eq. (289)) :

$$\mathcal{A}(\mathbf{V}) = \mathcal{M}(\mathbf{V}) \sum_{i \geq 0} a_i S_{3/2}^{(i)}(V^2) \mathbf{V}, \tag{268}$$

avec  $a_i$  la projection de  $\mathcal{A}$  sur la  $i$ -ème fonction propre. Les fonctions propres sont [10]

$$\psi_{nlm}(\mathbf{V}) \sim V^l S_{l+1/2}^{(n)}(V^2). \quad (269)$$

Ces fonctions sont orthogonales (orthonormales) dans  $L^2(\mathbb{R}^d, \mathcal{M}(\mathbf{V})d\mathbf{V})$ . La condition selon laquelle les moments de  $f$  sont donnés par ceux de  $f^{(0)}$  implique  $f^{(1)} \in \mathcal{P}^\perp$ , i.e.  $\mathcal{P}\mathcal{A} = 0$ . Ainsi comme l'Eq. (268) est antisymétrique en  $V$ , on voit de la forme de l'opérateur de projection (149) que la condition  $\mathcal{P}\mathcal{A} = 0$  s'écrit

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} \mathbf{V} f^{(1)}(\mathbf{V}) = \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} \mathbf{V} \mathcal{M}(\mathbf{V}) \mathcal{A}(\mathbf{V}) \cdot \nabla \ln T = 0 \\ \Rightarrow & \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} \mathbf{V} \mathcal{M}(\mathbf{V}) \mathcal{A}(\mathbf{V}) = 0 \\ \stackrel{(268)}{\Rightarrow} & \sum_{i \geq 0} a_i \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} \mathcal{M}(\mathbf{V}) S_{3/2}^{(i)}(V^2) \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} = 0, \quad S_{3/2}^{(0)} = 1 \\ \Rightarrow & \sum_{i \geq 0} a_i \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} \mathcal{M}(\mathbf{V}) S_{3/2}^{(i)}(V^2) \mathbf{V} S_{3/2}^{(0)}(V^2) \mathbf{V}}_{\sim \langle S_{3/2}^{(i)} \mathbf{V} | S_{3/2}^{(0)} \mathbf{V} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d, \mathcal{M}(\mathbf{V})d\mathbf{V})} \sim \delta_{i,0}} = 0 \\ \Rightarrow & a_0 = 0. \end{aligned} \quad (270)$$

Donc le premier coefficient non nul est  $a_1$ , c'est-à-dire

$$\mathcal{A}(\mathbf{V}) = \mathcal{M}(\mathbf{V}) \sum_{i \geq 1} a_i S_{3/2}^{(i)}(V^2) \mathbf{V}. \quad (271)$$

La troncation au premier ordre donne  $\mathcal{A}(\mathbf{V}) = a_1 \mathcal{M}(\mathbf{V}) \mathbf{S}(\mathbf{V})$ . Remarquons que ce résultat est indépendant de la forme des opérateurs de collision, et par conséquent reste valide pour l'annihilation. Le premier ordre non nul du développement de  $\mathcal{A}_i$ ,  $\mathcal{B}_i$ , et  $\mathcal{C}_{ij}$  dans les polynômes de Sonine est ainsi donné par [2, 10, 12]

$$\mathcal{A}(\mathbf{V}) = a_1 \mathcal{M}(\mathbf{V}) \mathbf{S}(\mathbf{V}), \quad (272)$$

$$\mathcal{B}(\mathbf{V}) = b_1 \mathcal{M}(\mathbf{V}) \mathbf{S}(\mathbf{V}), \quad (273)$$

$$\mathcal{C}(\mathbf{V}) = c_0 \mathcal{M}(\mathbf{V}) \mathbf{D}(\mathbf{V}). \quad (274)$$

### 3.3.4 Développement en polynômes de Sonine : coefficients de transport

Utilisant (272) à (274) dans (235) il vient

$$\nu_\eta^* = \frac{1}{\nu_0} \frac{\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} D_{ij}(\mathbf{V}) J[\mathcal{M} D_{ij}]}{\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} D_{ij}(\mathbf{V}) \mathcal{M}(\mathbf{V}) D_{ij}(\mathbf{V})} - p \frac{1}{\nu_0} \frac{\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} D_{ij}(\mathbf{V}) \Omega[\mathcal{M} D_{ij}]}{\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} D_{ij}(\mathbf{V}) \mathcal{M}(\mathbf{V}) D_{ij}(\mathbf{V})}, \quad (275)$$

$$\nu_\kappa^* = \frac{1}{\nu_0} \frac{\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V}) J[\mathcal{M} S_i]}{\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V}) \mathcal{M}(\mathbf{V}) S_i(\mathbf{V})} - p \frac{1}{\nu_0} \frac{\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V}) \Omega[\mathcal{M} S_i]}{\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V}) \mathcal{M}(\mathbf{V}) S_i(\mathbf{V})}, \quad (276)$$

$$\nu_\mu^* = \frac{1}{\nu_0} \frac{\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V}) J[\mathcal{M} S_i]}{\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V}) \mathcal{M}(\mathbf{V}) S_i(\mathbf{V})} - p \frac{1}{\nu_0} \frac{\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V}) \Omega[\mathcal{M} S_i]}{\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V}) \mathcal{M}(\mathbf{V}) S_i(\mathbf{V})} = \nu_\kappa^*. \quad (277)$$

Tous les dénominateurs peuvent être calculés explicitement facilement. En effet :

$$\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V}) S_i(\mathbf{V}) \mathcal{M}(\mathbf{V}) = \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} \left( \frac{m}{2} V^2 - \frac{d+2}{2} k_B T \right)^2 V_i V_i \mathcal{M}(\mathbf{V}), \quad (278)$$

avec  $\mathcal{M}(\mathbf{V})$  exprimé dans le régime d'échelle :

$$\mathcal{M}(\mathbf{V}) = \frac{n}{v_T^d} \mathcal{M}(c) = \frac{n}{v_T^d} \frac{1}{\pi^{d/2}} e^{-c^2} = \frac{n}{v_T^d} \frac{1}{\pi^{d/2}} e^{-V^2/v_T^2}, \quad v_T = \sqrt{2/\beta m}. \quad (279)$$

(279) dans (278) donne :

$$\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V})S_i(\mathbf{V})\mathcal{M}(\mathbf{V}) = \frac{n}{v_T^d} \frac{1}{\pi^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} \left( \frac{m^2}{4} V^4 + \frac{(d+2)^2}{4} \frac{1}{\beta^2} - m \frac{d+2}{2} \frac{1}{\beta} V^2 \right) V^2 e^{-V^2/v_T^2}, \quad (280)$$

qui avec le changement de variables  $\mathbf{c} = \mathbf{V}/v_T$ ,  $d\mathbf{V} = v_T^d d\mathbf{c}$ , devient :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V})S_i(\mathbf{V})\mathcal{M}(\mathbf{V}) &= \frac{n}{\pi^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{c} \left( \frac{m^2}{4} v_T^6 c^6 + \frac{(d+2)^2}{4} \frac{1}{\beta^2} v_T^2 c^2 - m \frac{d+2}{2} \frac{1}{\beta} v_T^4 c^4 \right) e^{-c^2} \\ &= \frac{n}{\pi^{d/2}} \left[ \frac{m^2}{4} v_T^6 I_6 + \frac{(d+2)^2}{4} \frac{1}{\beta^2} v_T^2 I_2 - m \frac{d+2}{2} \frac{1}{\beta} v_T^4 I_4 \right], \end{aligned} \quad (281)$$

où

$$I_n = \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{c} c^n e^{-c^2} = \pi^{d/2} \frac{\Gamma[(d+n)/2]}{\Gamma(d/2)}, \quad (282)$$

(282) dans (281) donne :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V})S_i(\mathbf{V})\mathcal{M}(\mathbf{V}) &= \frac{n}{\pi^{d/2}} \left[ \frac{m^2}{4} v_T^6 \pi^{d/2} \frac{\Gamma[(d+6)/2]}{\Gamma(d/2)} + \frac{(d+2)^2}{4} \frac{1}{\beta^2} v_T^2 \pi^{d/2} \frac{\Gamma[(d+2)/2]}{\Gamma(d/2)} \right. \\ &\quad \left. - m \frac{d+2}{2} \frac{1}{\beta} v_T^4 \pi^{d/2} \frac{\Gamma[(d+4)/2]}{\Gamma(d/2)} \right] \\ &= n \left[ \frac{m^2}{4} \left( \frac{2}{\beta m} \right)^3 \frac{d+4}{2} \frac{d+2}{2} \frac{d}{2} + \frac{(d+2)^2}{4} \frac{1}{\beta^2} \left( \frac{2}{\beta m} \right) \frac{d}{2} \right. \\ &\quad \left. - m \frac{d+2}{2} \frac{1}{\beta} \left( \frac{2}{\beta m} \right)^2 \frac{d+2}{2} \frac{d}{2} \right] \\ &= \frac{nd}{\beta^3 m} \left[ \frac{1}{4} (d+2)(d+4) + \frac{(d+2)^2}{4} - \frac{(d+2)^2}{2} \right] \\ &= \frac{d(d+2)}{2} \frac{n}{m\beta^3}. \end{aligned} \quad (283)$$

Si  $d = 3$  on a bien le préfacteur  $15/2$ , le même que dans [2]. L'autre dénominateur est :

$$\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} D_{ij}(\mathbf{V})D_{ij}(\mathbf{V})\mathcal{M}(\mathbf{V}) = \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} m^2 \left( V_i V_j - \frac{1}{d} V^2 \delta_{ij} \right) \left( V_i V_j - \frac{1}{d} V^2 \delta_{ij} \right) \frac{n}{v_T^d} \frac{1}{\pi^{d/2}} e^{-V^2/v_T^2}, \quad (284)$$

qui avec le changement de variables  $\mathbf{c} = \mathbf{V}/v_T$ ,  $d\mathbf{V} = v_T^d d\mathbf{c}$ , devient :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} D_{ij}(\mathbf{V})D_{ij}(\mathbf{V})\mathcal{M}(\mathbf{V}) &= \frac{n}{\pi^{d/2}} m^2 v_T^4 \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{c} \left( \underbrace{c_i c_j c_i c_j}_{=c^4} - \frac{1}{d} c^2 \underbrace{2 c_i c_j \delta_{ij}}_{=c^2} + \frac{1}{d^2} c^4 \underbrace{\delta_{ij} \delta_{ij}}_{=d} \right) e^{-c^2} \\ &= \frac{n}{\pi^{d/2}} m^2 v_T^4 \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{c} \left( c^4 - \frac{2}{d} c^4 + \frac{1}{d} c^4 \right) e^{-c^2} \\ &= \frac{n}{\pi^{d/2}} m^2 \left( \frac{2}{\beta m} \right)^2 \frac{d-1}{d} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{c} c^4 e^{-c^2} \\ &= \frac{n}{\pi^{d/2}} \frac{4}{\beta^2} \frac{d-1}{d} \pi^{d/2} \frac{\Gamma[(d+4)/2]}{\Gamma(d/2)} \\ &= \frac{(d+2)(d-1)}{\beta^2} n. \end{aligned} \quad (285)$$

A nouveau, pour  $d = 3$  on a le préfacteur 10 qui est le même que celui de [2]. Les Eqs. (285) et (283) dans (275) à (277) donnent :

$$\begin{aligned}
\nu_\eta^* &= \frac{\beta^2}{(d+2)(d-1)n\nu_0} \left[ \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} D_{ij}(\mathbf{V}) J[\mathcal{M}D_{ij}] - p \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} D_{ij}(\mathbf{V}) \Omega[\mathcal{M}D_{ij}] \right], \\
\nu_\kappa^* = \nu_\mu^* &= \frac{2m\beta^3}{d(d+2)n\nu_0} \left[ \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V}) J[\mathcal{M}S_i] - p \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V}) \Omega[\mathcal{M}S_i] \right].
\end{aligned} \tag{286}$$

Il reste à calculer les numérateurs. Pour ceci, on se souvient que

$$\begin{aligned}
Jg &= -pJ_a[f^{(0)}, g] - pJ_a[g, f^{(0)}] - (1-p)J_c[f^{(0)}, g] - (1-p)J_c[g, f^{(0)}] \\
&= pL_a g + (1-p)L_c g,
\end{aligned} \tag{287}$$

où on a défini les opérateurs  $L_a$  et  $L_c$  par :

$$\begin{aligned}
L_a g &= -J_a[f^{(0)}, g] - J_a[g, f^{(0)}] \\
&\stackrel{(9)}{=} \sigma^{d-1} \beta_1 \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v}_2 |\mathbf{v}_{12}| \left[ g(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1; t) f^{(0)}(\mathbf{v}_2; t) + f^{(0)}(\mathbf{v}_1; t) g(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_2; t) \right], \\
L_c g &= -J_c[f^{(0)}, g] - J_c[g, f^{(0)}] \\
&\stackrel{(8)}{=} -\sigma^{d-1} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v}_2 \int d\hat{\boldsymbol{\sigma}} \theta(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{v}_{12}) (\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{v}_{12}) (b^{-1} - 1) \times \\
&\quad \times \left[ g(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1; t) f^{(0)}(\mathbf{v}_2; t) + f^{(0)}(\mathbf{v}_1; t) g(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_2; t) \right],
\end{aligned} \tag{288}$$

avec  $\beta_1$  donné par l'Eq. (10). L'opérateur de collision linéaire des sphères dures  $L_c$  a été étudié dans la littérature. Ce qu'il est nécessaire de calculer sont les intégrales (les numérateurs des Eqs. (286)) :

$$\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} D_{ij}(\mathbf{V}) J[\mathcal{M}D_{ij}] \stackrel{(287)}{=} p \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} D_{ij}(\mathbf{V}) L_a[\mathcal{M}D_{ij}] + (1-p) \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} D_{ij}(\mathbf{V}) L_c[\mathcal{M}D_{ij}], \tag{290}$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V}) J[\mathcal{M}D_{ij}] \stackrel{(287)}{=} p \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V}) L_a[\mathcal{M}S_i] + (1-p) \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V}) L_c[\mathcal{M}S_i]. \tag{291}$$

Pour réaliser les calculs des termes en  $L_a$  et  $L_c$ , nous aurons besoin des deux lemmes suivants.

**Lemme 3.3** *Soit  $X$  et  $Y$  deux fonctions quelconques, alors*

$$\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v}_1 Y(\mathbf{v}_1) L_a[\mathcal{M}X] = \sigma^{d-1} \beta_1 \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 |\mathbf{v}_{12}| f^{(0)}(\mathbf{v}_1) \mathcal{M}(\mathbf{v}_2) X(\mathbf{v}_2) [Y(\mathbf{v}_1) + Y(\mathbf{v}_2)]. \tag{292}$$

**Preuve.** utilisant la définition (288) :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v}_1 Y(\mathbf{v}_1) L_a[\mathcal{M}X] &= \sigma^{d-1} \beta_1 \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 |\mathbf{v}_{12}| Y(\mathbf{v}_1) \times \\
&\quad \times \left[ \mathcal{M}(\mathbf{v}_1) X(\mathbf{v}_1) f^{(0)}(\mathbf{v}_2) + f^{(0)}(\mathbf{v}_1) \mathcal{M}(\mathbf{v}_2) X(\mathbf{v}_2) \right] \\
&= \sigma^{d-1} \beta_1 \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 |\mathbf{v}_{12}| Y(\mathbf{v}_1) \mathcal{M}(\mathbf{v}_1) X(\mathbf{v}_1) f^{(0)}(\mathbf{v}_2) \\
&\quad + \sigma^{d-1} \beta_1 \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 |\mathbf{v}_{12}| Y(\mathbf{v}_1) f^{(0)}(\mathbf{v}_1) \mathcal{M}(\mathbf{v}_2) X(\mathbf{v}_2).
\end{aligned} \tag{293}$$

Dans la première intégrale, on change les notations selon  $\mathbf{v}_1 \rightarrow \mathbf{v}_2$ ,  $\mathbf{v}_2 \rightarrow \mathbf{v}_1$ , donc :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v}_1 Y(\mathbf{v}_1) L_a[\mathcal{M}X] &= \sigma^{d-1} \beta_1 \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 |\mathbf{v}_{12}| Y(\mathbf{v}_2) \mathcal{M}(\mathbf{v}_2) X(\mathbf{v}_2) f^{(0)}(\mathbf{v}_1) \\
&\quad + \sigma^{d-1} \beta_1 \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 |\mathbf{v}_{12}| Y(\mathbf{v}_1) f^{(0)}(\mathbf{v}_1) \mathcal{M}(\mathbf{v}_2) X(\mathbf{v}_2) \\
&= \sigma^{d-1} \beta_1 \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 |\mathbf{v}_{12}| f^{(0)}(\mathbf{v}_1) \mathcal{M}(\mathbf{v}_2) X(\mathbf{v}_2) [Y(\mathbf{v}_1) + Y(\mathbf{v}_2)],
\end{aligned}$$

ce qui est le résultat cherché. ■

**Lemme 3.4** *Soit  $X$  et  $Y$  deux fonctions quelconques, alors :*

$$\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v}_1 Y(\mathbf{v}_1) L_c[\mathcal{M}X] = -\sigma^{d-1} \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 f^{(0)}(\mathbf{v}_1) \mathcal{M}(\mathbf{v}_2) X(\mathbf{v}_2) \times \\ \times \int d\hat{\boldsymbol{\sigma}} \theta(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{v}_{12}) (\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{v}_{12}) (b-1) [Y(\mathbf{v}_1) + Y(\mathbf{v}_2)]. \quad (294)$$

**Preuve.** utilisant la définition (289) :

$$\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v}_1 Y(\mathbf{v}_1) L_c[\mathcal{M}X] = -\sigma^{d-1} \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 \int d\hat{\boldsymbol{\sigma}} \theta(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{v}_{12}) (\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{v}_{12}) Y(\mathbf{v}_1) (b^{-1} - 1) \times \\ \times \left[ \mathcal{M}(\mathbf{v}_1) X(\mathbf{v}_1) f^{(0)}(\mathbf{v}_2) + f^{(0)}(\mathbf{v}_1) \mathcal{M}(\mathbf{v}_2) X(\mathbf{v}_2) \right] \\ = -\sigma^{d-1} \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 \int d\hat{\boldsymbol{\sigma}} \theta(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{v}_{12}) (\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{v}_{12}) Y(\mathbf{v}_1) b^{-1} \times \\ \times \left[ \mathcal{M}(\mathbf{v}_1) X(\mathbf{v}_1) f^{(0)}(\mathbf{v}_2) + f^{(0)}(\mathbf{v}_1) \mathcal{M}(\mathbf{v}_2) X(\mathbf{v}_2) \right] \\ + \sigma^{d-1} \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 \int d\hat{\boldsymbol{\sigma}} \theta(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{v}_{12}) (\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{v}_{12}) Y(\mathbf{v}_1) \times \\ \times \left[ \mathcal{M}(\mathbf{v}_1) X(\mathbf{v}_1) f^{(0)}(\mathbf{v}_2) + f^{(0)}(\mathbf{v}_1) \mathcal{M}(\mathbf{v}_2) X(\mathbf{v}_2) \right]. \quad (295)$$

Dans la première intégrale, on fait le changement de variables

$$\mathbf{v}'_1 = b^{-1} \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1 - (\mathbf{v}_{12} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}) \hat{\boldsymbol{\sigma}}, \quad (296)$$

$$\mathbf{v}'_2 = b^{-1} \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 + (\mathbf{v}_{12} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}) \hat{\boldsymbol{\sigma}}. \quad (297)$$

L'intégration sur l'angle solide n'est pas modifiée, et :

$$d\mathbf{v}'_1 d\mathbf{v}'_2 = J d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2, \quad (298)$$

$$J = \left| \det \begin{pmatrix} (1 - \hat{\boldsymbol{\sigma}}^2) \mathbb{1}_d & \hat{\boldsymbol{\sigma}}^2 \mathbb{1}_d \\ \hat{\boldsymbol{\sigma}}^2 \mathbb{1}_d & (1 - \hat{\boldsymbol{\sigma}}^2) \mathbb{1}_d \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_d \\ \mathbb{1}_d & 0 \end{pmatrix} \right| = 1. \quad (299)$$

L'effet de ce changement de variables sur  $\mathbf{v}_{12}$  est :

$$b^{-1} \mathbf{v}_{12} = \mathbf{v}_{12} - 2(\mathbf{v}_{12} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}) \hat{\boldsymbol{\sigma}}, \quad (300)$$

donc

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot b^{-1} \mathbf{v}_{12} = \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{v}_{12} - 2(\mathbf{v}_{12} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}) \hat{\boldsymbol{\sigma}}^2 = -\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{v}_{12}. \quad (301)$$

Ainsi l'Eq. (295) devient (en sachant que  $b^{-1} A(\mathbf{v}_i) = A(b^{-1} \mathbf{v}_i)$  pour  $i = 1, 2$  et toute fonction  $A$ ) :

$$\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v}_1 Y(\mathbf{v}_1) L_c[\mathcal{M}X] = -\sigma^{d-1} \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\mathbf{v}'_1 d\mathbf{v}'_2 \int d\hat{\boldsymbol{\sigma}} \theta(-\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{v}_{12}) (-\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{v}_{12}) Y(b\mathbf{v}'_1) \times \\ \times \left[ \mathcal{M}(\mathbf{v}'_1) X(\mathbf{v}'_1) f^{(0)}(\mathbf{v}'_2) + f^{(0)}(\mathbf{v}'_1) \mathcal{M}(\mathbf{v}'_2) X(\mathbf{v}'_2) \right] \\ + \sigma^{d-1} \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 \int d\hat{\boldsymbol{\sigma}} \theta(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{v}_{12}) (\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{v}_{12}) Y(\mathbf{v}_1) \times \\ \times \left[ \mathcal{M}(\mathbf{v}_1) X(\mathbf{v}_1) f^{(0)}(\mathbf{v}_2) + f^{(0)}(\mathbf{v}_1) \mathcal{M}(\mathbf{v}_2) X(\mathbf{v}_2) \right]. \quad (302)$$

Dans la première intégrale, on fait le changement de variables  $\mathbf{v}'_1 \rightarrow \mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}'_2 \rightarrow \mathbf{v}_2$ , donc :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v}_1 Y(\mathbf{v}_1) L_c[\mathcal{M}X] &= -\sigma^{d-1} \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 \int d\hat{\boldsymbol{\sigma}} \theta(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{v}_{12})(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{v}_{12}) \times \\
&\quad \times \left[ \mathcal{M}(\mathbf{v}_1) X(\mathbf{v}_1) f^{(0)}(\mathbf{v}_2) + f^{(0)}(\mathbf{v}_1) \mathcal{M}(\mathbf{v}_2) X(\mathbf{v}_2) \right] (b-1) Y(\mathbf{v}_1) \\
&= -\sigma^{d-1} \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 \int d\hat{\boldsymbol{\sigma}} \theta(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{v}_{12})(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{v}_{12}) \times \\
&\quad \times \mathcal{M}(\mathbf{v}_1) X(\mathbf{v}_1) f^{(0)}(\mathbf{v}_2) (b-1) Y(\mathbf{v}_1) \\
&\quad - \sigma^{d-1} \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 \int d\hat{\boldsymbol{\sigma}} \theta(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{v}_{12})(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{v}_{12}) \times \\
&\quad \times \mathcal{M}(\mathbf{v}_2) X(\mathbf{v}_2) f^{(0)}(\mathbf{v}_1) (b-1) Y(\mathbf{v}_1).
\end{aligned}$$

Soit le changement de variables  $\mathbf{v}_1 \rightarrow \mathbf{v}_2$ ,  $\mathbf{v}_2 \rightarrow \mathbf{v}_1$  dans la première intégrale, alors :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v}_1 Y(\mathbf{v}_1) L_c[\mathcal{M}X] &= -\sigma^{d-1} \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 \int d\hat{\boldsymbol{\sigma}} \theta(-\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{v}_{12})(-\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{v}_{12}) \times \\
&\quad \times \mathcal{M}(\mathbf{v}_2) X(\mathbf{v}_2) f^{(0)}(\mathbf{v}_1) (b-1) Y(\mathbf{v}_2) \\
&\quad - \sigma^{d-1} \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 \int d\hat{\boldsymbol{\sigma}} \theta(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{v}_{12})(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{v}_{12}) \times \\
&\quad \times \mathcal{M}(\mathbf{v}_2) X(\mathbf{v}_2) f^{(0)}(\mathbf{v}_1) (b-1) Y(\mathbf{v}_1), \\
&= -\sigma^{d-1} \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 f^{(0)}(\mathbf{v}_1) \mathcal{M}(\mathbf{v}_2) X(\mathbf{v}_2) \times \\
&\quad \times \int d\hat{\boldsymbol{\sigma}} \theta(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{v}_{12})(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{v}_{12}) (b-1) [Y(\mathbf{v}_1) + Y(\mathbf{v}_2)], \tag{303}
\end{aligned}$$

ce qui est le résultat cherché. ■

### 3.3.4.1 Calcul de $L_a$ avec $X = Y = S_i(\mathbf{V}) : \nu_\kappa^*, \nu_\mu^*$

On doit calculer la grandeur

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v}_1 Y(\mathbf{v}_1) L_a[\mathcal{M}X] &\stackrel{\text{lemme 3.3}}{=} \sigma^{d-1} \beta_1 \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 |\mathbf{v}_{12}| f^{(0)}(\mathbf{v}_1) \mathcal{M}(\mathbf{v}_2) [Y(\mathbf{v}_1) + Y(\mathbf{v}_2)] \\
&= \sigma^{d-1} \beta_1 \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 |\mathbf{v}_{12}| f^{(0)}(\mathbf{v}_1) \mathcal{M}(\mathbf{v}_2) \times \\
&\quad \times [S_i(\mathbf{v}_2) S_i(\mathbf{v}_1) + S_i(\mathbf{v}_2) S_i(\mathbf{v}_2)], \tag{304}
\end{aligned}$$

avec

$$f^{(0)}(\mathbf{V}_1) = \frac{n}{v_T^d} \mathcal{M}\left(\frac{\mathbf{V}_1}{v_T}\right) \left[1 + a_2 S_2\left(\frac{\mathbf{V}_1^2}{v_T^2}\right)\right] = \frac{n}{v_T^d} \frac{1}{\pi^{d/2}} e^{-\mathbf{V}_1^2/v_T^2} \left[1 + a_2 S_2\left(\frac{\mathbf{V}_1^2}{v_T^2}\right)\right] \tag{305}$$

$$\mathcal{M}(\mathbf{V}_2) = \frac{n}{v_T^d} \frac{1}{\pi^{d/2}} e^{-\mathbf{V}_2^2/v_T^2} \tag{306}$$

$$S_i(\mathbf{V}) = \left(\frac{m}{2} V^2 - \frac{d+2}{2} \frac{1}{\beta}\right) V_i. \tag{307}$$

Ainsi l'Eq. (304) devient

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v}_1 S_i(\mathbf{V}_1) L_a[\mathcal{M}S_i] &= \sigma^{d-1} \beta_1 \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 |\mathbf{v}_{12}| \frac{n}{v_T^d} \frac{1}{\pi^{d/2}} e^{-V_1^2/v_T^2} \frac{n}{v_T^d} \frac{1}{\pi^{d/2}} e^{-V_2^2/v_T^2} \times \\ &\times \left[ 1 + a_2 S_2 \left( \frac{V_1^2}{v_T^2} \right) \right] \left[ \left( \frac{m}{2} V_1^2 - \frac{d+2}{2} \frac{1}{\beta} \right) \left( \frac{m}{2} V_2^2 - \frac{d+2}{2} \frac{1}{\beta} \right) V_{1i} V_{2i} \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{m}{2} V_2^2 - \frac{d+2}{2} \frac{1}{\beta} \right)^2 V_{2i} V_{2i} \right]. \end{aligned} \quad (308)$$

Soit le changement de variables  $c_i = V_i/v_T$ ,  $d\mathbf{c} = d\mathbf{V}/v_T^d$ , alors

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v}_1 S_i(\mathbf{V}_1) L_a[\mathcal{M}S_i] &= \sigma^{d-1} \beta_1 \frac{n^2}{\pi^d} \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\mathbf{c}_1 d\mathbf{c}_2 v_T |\mathbf{c}_{12}| e^{-c_1^2 - c_2^2} [1 + a_2 S_2(c_1^2)] \times \\ &\quad \times \left[ \left( \frac{m}{2} v_T^2 c_1^2 - \frac{d+2}{2} \frac{1}{\beta} \right) \left( \frac{m}{2} v_T^2 c_2^2 - \frac{d+2}{2} \frac{1}{\beta} \right) v_T^2 (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2) \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{m}{2} v_T^2 c_1^2 - \frac{d+2}{2} \frac{1}{\beta} \right)^2 v_T^2 c_2^2 \right] \\ &= \sigma^{d-1} \beta_1 \frac{n^2}{\pi^d} v_T^3 \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\mathbf{c}_1 d\mathbf{c}_2 |\mathbf{c}_{12}| e^{-c_1^2 - c_2^2} [1 + A c_1^4 + B c_1^2 + D] \times \\ &\quad \times [(E c_1^2 + F)(E c_2^2 + F) \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2 + (E c_2^2 + F)^2 c_2^2], \end{aligned} \quad (309)$$

avec

$$A = \frac{1}{2} a_2, \quad (310)$$

$$B = -\frac{d+2}{2} a_2, \quad (311)$$

$$D = \frac{d(d+2)}{8} a_2 = -\frac{d}{4} B, \quad (312)$$

$$E = \frac{m}{2} v_T^2, \quad (313)$$

$$F = -\frac{d+2}{2} \frac{1}{\beta} = \frac{B}{a_2}, \quad (314)$$

car

$$F = -\frac{d+2}{2} \frac{1}{\beta} = -\frac{d+2}{2} \frac{m}{2} \underbrace{\frac{2}{m\beta}}_{=v_T^2} = \underbrace{-\frac{d+2}{2} \frac{m}{2} v_T^2}_{=B/a_2} = \frac{B}{a_2} E. \quad (315)$$

Ainsi

$$\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v}_1 S_i(\mathbf{V}_1) L_a[\mathcal{M}S_i] = \sigma^{d-1} \beta_1 \frac{n^2}{\pi^d} \underbrace{v_T^3 E^2}_{=\frac{m^2}{4} v_T^7} \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\mathbf{c}_1 d\mathbf{c}_2 |\mathbf{c}_{12}| e^{-c_1^2 - c_2^2} H(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2), \quad (316)$$

où

$$\begin{aligned}
H(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2) &= \underbrace{\left(1 + Ac_1^4 + Bc_1^2 - \frac{d}{4}B\right) \left(c_2^2 + \frac{B}{a_2}\right)}_{= \frac{B}{a_2} \left(1 - \frac{d}{4}B\right) + \left(1 - \frac{d}{4}B\right)c_2^2 + \frac{B^2}{a_2^2}c_1^2 + \frac{AB}{a_2}c_1^4 + Bc_1^2c_2^2 + Ac_1^4c_2^2} \underbrace{\left[\left(c_1^2 + \frac{B}{a_2}\right) \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2 + \left(c_2^2 + \frac{B}{a_2}\right) c_2^2\right]}_{= c_1^2 \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2 + \frac{B}{a_2} \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2 + c_2^4 + \frac{B}{a_2} c_2^2} \\
&= \frac{B}{a_2} \left(1 - \frac{d}{4}B\right) c_1^2 (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2) + \left(\frac{B}{a_2}\right)^2 \left(1 - \frac{d}{4}B\right) (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2) + \frac{B}{a_2} \left(1 - \frac{d}{4}B\right) c_2^4 \\
&\quad + \left(\frac{B}{a_2}\right)^2 \left(1 - \frac{d}{4}B\right) c_2^2 + \left(1 - \frac{d}{4}B\right) c_1^2 c_2^2 (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2) + \frac{B}{a_2} \left(1 - \frac{d}{4}B\right) c_2^2 (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2) \\
&\quad + \left(1 - \frac{d}{4}B\right) c_2^6 + \frac{B}{a_2} \left(1 - \frac{d}{4}B\right) c_2^4 + \frac{B^2}{a_2} c_1^4 (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2) + \frac{B^3}{a_2^2} c_1^2 (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2) + \frac{B^2}{a_2} c_1^2 c_2^4 + \frac{B^3}{a_2^2} c_1^2 c_2^2 \\
&\quad + \frac{AB}{a_2} c_1^6 (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2) + \frac{AB}{a_2^2} c_1^4 (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2) + \frac{AB}{a_2} c_1^4 c_2^4 + \frac{AB^2}{a_2^2} c_1^4 c_2^2 + Bc_1^4 c_2^2 (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2) + \frac{B^2}{a_2} c_1^2 c_2^2 (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2) \\
&\quad + Bc_1^2 c_2^6 + \frac{B^2}{a_2} c_1^2 c_2^4 + Ac_1^6 c_2^2 (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2) + \frac{AB}{a_2} c_1^4 c_2^2 (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2) + Ac_1^4 c_2^6 + \frac{AB}{a_2} c_1^4 c_2^4 \\
&= \frac{B}{a_2} \left(1 - \frac{d}{4}B + \frac{B^2}{a_2}\right) c_1^2 (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2) + \left(\frac{B}{a_2}\right) \left(1 - \frac{d}{4}B\right) (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2) + 2\frac{B}{a_2} \left(1 - \frac{d}{4}B\right) c_2^4 \\
&\quad + \left(\frac{B}{a_2}\right)^2 \left(1 - \frac{d}{4}B\right) c_2^2 + \left(1 - \frac{d}{4}B + \frac{B^2}{a_2}\right) c_1^2 c_2^2 (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2) + \frac{B}{a_2} \left(1 - \frac{d}{4}B\right) c_2^2 (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2) \\
&\quad + \left(1 - \frac{d}{4}B\right) c_2^6 + \frac{B^2}{a_2} \left(1 + \frac{A}{a_2}\right) c_1^4 (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2) + 2\frac{B^2}{a_2} c_1^2 c_2^4 + \frac{B^3}{a_2^2} c_1^2 c_2^2 + \frac{AB}{a_2} c_1^6 (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2) \\
&\quad + 2\frac{AB}{a_2} c_1^4 c_2^4 + \frac{AB^2}{a_2^2} c_1^4 c_2^2 + B \left(1 + \frac{A}{a_2}\right) c_1^4 c_2^2 (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2) \\
&\quad + Bc_1^2 c_2^6 + Ac_1^6 c_2^2 (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2) + Ac_1^4 c_2^6. \tag{317}
\end{aligned}$$

Passage dans les coordonnées relatives et du centre de masse :

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{c}_{12} &= \mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2 \\ \mathbf{C} &= \frac{1}{2}(\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2) \end{aligned} \right\} \implies \begin{cases} \mathbf{c}_1 &= \mathbf{C} + \frac{1}{2}\mathbf{c}_{12} \\ \mathbf{c}_2 &= \mathbf{C} - \frac{1}{2}\mathbf{c}_{12}, \end{cases} \tag{318}$$

avec jacobien unité  $d\mathbf{c}_1 d\mathbf{c}_2 = d\mathbf{c}_{12} d\mathbf{C}$ . Ainsi :

$$\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2 = C^2 - \frac{1}{4}c_{12}^4, \tag{319}$$

$$c_1^2 = C^2 + \frac{1}{4}c_{12}^2 \pm (\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}), \tag{320}$$

$$c_1^4 = \left(C^2 + \frac{1}{4}c_{12}^2\right)^2 + (\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})^2 \pm 2(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) \left(C^2 + \frac{1}{4}c_{12}^2\right), \tag{321}$$

$$c_1^6 = \left(C^2 + \frac{1}{4}c_{12}^2\right)^3 + 3(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})^2 \left(C^2 + \frac{1}{4}c_{12}^2\right) \pm (\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) \left[3 \left(C^2 + \frac{1}{4}c_{12}^2\right)^2 + \frac{1}{4}C^2 c_{12}^2\right] \tag{322}$$

Ceci permet de calculer les différents termes de l'Eq. (317).

$$c_1^2(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2) = \left[ C^2 + \frac{1}{4}c_{12}^2 + (\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) \right] \left( C^2 - \frac{1}{4}c_{12}^2 \right), \quad (323)$$

$$c_1^2 c_2^2(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2) = \left[ \left( C^2 + \frac{1}{4}c_{12}^2 \right)^2 - (\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})^2 \right] \left( C^2 - \frac{1}{4}c_{12}^2 \right), \quad (324)$$

$$c_1^4(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2) = \left[ \left( C^2 + \frac{1}{4}c_{12}^2 \right)^2 + (\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})^2 + 2(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) \left( C^2 + \frac{1}{4}c_{12}^2 \right) \right] \left( C^2 - \frac{1}{4}c_{12}^2 \right), \quad (325)$$

$$\begin{aligned} c_1^2 c_2^4 &= \left( C^2 + \frac{1}{4}c_{12}^2 \right) \left[ \left( C^2 + \frac{1}{4}c_{12}^2 \right)^2 + (\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})^2 \mp 2(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) \left( C^2 + \frac{1}{4}c_{12}^2 \right) \right] \\ &\quad \pm (\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) \left( C^2 + \frac{1}{4}c_{12}^2 \right)^2 \pm (\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})^3 - 2(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})^2 \left( C^2 + \frac{1}{4}c_{12}^2 \right), \end{aligned} \quad (326)$$

$$c_1^2 c_2^2 = \left( C^2 + \frac{1}{4}c_{12}^2 \right)^2 - (\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})^2, \quad (327)$$

$$\begin{aligned} c_1^6(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2) &= \left( C^2 - \frac{1}{4}c_{12}^2 \right) \left[ \left( C^2 + \frac{1}{4}c_{12}^2 \right)^3 + 3(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})^2 \left( C^2 + \frac{1}{4}c_{12}^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + (\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) \left\{ 3 \left( C^2 + \frac{1}{4}c_{12}^2 \right)^2 + (\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})^2 \right\} \right], \end{aligned} \quad (328)$$

$$c_1^4 c_2^4 = \left( C^2 + \frac{1}{4}c_{12}^2 \right)^4 + (\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})^4 - 2(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})^2 \left( C^2 + \frac{1}{4}c_{12}^2 \right)^2, \quad (329)$$

$$\begin{aligned} c_1^4 c_2^2(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2) &= \left( C^2 - \frac{1}{4}c_{12}^2 \right) \left[ \left( C^2 + \frac{1}{4}c_{12}^2 \right)^3 - (\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})^2 \left( C^2 + \frac{1}{4}c_{12}^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + (\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) \left( C^2 + \frac{1}{4}c_{12}^2 \right)^2 - (\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})^3 \right], \end{aligned} \quad (330)$$

$$\begin{aligned} c_1^2 c_2^6 &= \left( C^2 + \frac{1}{4}c_{12}^2 \right)^4 \mp 2(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) \left( C^2 + \frac{1}{4}c_{12}^2 \right)^3 \\ &\quad \pm 2(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})^3 \left( C^2 + \frac{1}{4}c_{12}^2 \right) - (\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})^4, \end{aligned} \quad (331)$$

$$\begin{aligned} c_1^6 c_2^2(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2) &= \left( C^2 - \frac{1}{4}c_{12}^2 \right) \left[ \left( C^2 + \frac{1}{4}c_{12}^2 \right)^4 + 2(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) \left( C^2 + \frac{1}{4}c_{12}^2 \right)^3 \right. \\ &\quad \left. - 2(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})^3 \left( C^2 + \frac{1}{4}c_{12}^2 \right) - (\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})^4 \right], \end{aligned} \quad (332)$$

$$\begin{aligned} c_1^4 c_2^6 &= \left( C^2 + \frac{1}{4}c_{12}^2 \right)^5 - (\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) \left( C^2 + \frac{1}{4}c_{12}^2 \right)^4 - 2(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) \left( C^2 + \frac{1}{4}c_{12}^2 \right)^3 \\ &\quad + 2(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})^3 \left( C^2 + \frac{1}{4}c_{12}^2 \right)^2 + (\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})^4 \left( C^2 + \frac{1}{4}c_{12}^2 \right) - (\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})^5. \end{aligned} \quad (333)$$

Par antisymétrie, les termes en  $(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})^{2k+1}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , engendrent une contribution nulle à l'intégrale. De plus, la relation (260) donne

$$(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})^2 = \frac{1}{d} C^2 c_{12}^2, \quad (334)$$

où l'égalité est à interpréter au sens d'une intégration sur un domaine symétrique avec poids symétrique. Qu'en est-il de  $(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})^4$  ?

**Lemme 3.5** Soit  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$ , soient  $F(x)$  et  $G(y)$  des fonctions intégrables qui ne dépendent que des modules de  $x$  et  $y$  (donc qui sont paires en  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  respectivement), alors

$$\int_{\mathbb{R}^{2d}} dx dy F(x) G(y) (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^4 = \int_{\mathbb{R}^{2d}} dx dy F(x) G(y) \left( \frac{3}{d^2} x^4 y^4 - 2dx_i^4 y_j^4 \right), \quad (335)$$

où les indices  $i$  et  $j$  peuvent être choisis arbitrairement dans l'ensemble  $\{1, \dots, d\}$ .

**Preuve.** on a

$$\begin{aligned}
(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^4 &= \sum_{ijkl=1}^d x_i x_j x_k x_l y_i y_j y_k y_l \\
&= \sum_{ijkl=1}^d x_i x_j x_k x_l y_i y_j y_k y_l [\delta_{ijkl} + (1 - \delta_{ijkl}) (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})] \\
&\quad + \sum_{ijkl=1}^d x_i x_j x_k x_l y_i y_j y_k y_l [(1 - \delta_{ijkl}) + (1 - \delta_{ij} \delta_{kl}) + (1 - \delta_{ik} \delta_{jl}) + (1 - \delta_{il} \delta_{jk})]. \quad (336)
\end{aligned}$$

La première somme contient tous les moments pairs, tandis que la seconde les moments impairs. La contribution de ces derniers à l'intégrale sera donc nulle. Ainsi, en interprétant les égalités au sens de l'intégration du lemme :

$$\begin{aligned}
(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^4 &= \sum_{ijkl=1}^d x_i x_j x_k x_l y_i y_j y_k y_l \delta_{ijkl} \\
&\quad + \sum_{ijkl=1}^d x_i x_j x_k x_l y_i y_j y_k y_l \delta_{ij} \delta_{kl} (1 - \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{ik}) \\
&\quad + \sum_{ijkl=1}^d x_i x_j x_k x_l y_i y_j y_k y_l \delta_{ik} \delta_{jl} (1 - \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{ik}) \\
&\quad + \sum_{ijkl=1}^d x_i x_j x_k x_l y_i y_j y_k y_l \delta_{il} \delta_{jk} (1 - \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{ik}) \\
&= \sum_{i=1}^d x_i^4 y_i^4 + 3 \sum_{ij=1}^d x_i^2 x_j^2 y_i^2 y_j^2 (1 - \delta_{ij}) \\
&= \sum_{i=1}^d x_i^4 y_i^4 + 3 \sum_{ij=1}^d x_i^2 x_j^2 y_i^2 y_j^2 - 3 \sum_{i=1}^d x_i^4 y_i^4 \\
&= 3 \sum_{i=1}^d x_i^2 y_i^2 \sum_{j=1}^d x_j^2 y_j^2 - 2 \sum_{i=1}^d x_i^4 y_i^4 \\
&\stackrel{\text{isotropie}}{=} 3 \underbrace{\sum_{i=1}^d \frac{1}{d}}_{=x^2} \underbrace{\sum_{k=1}^d y_k^2}_{=y^2} \underbrace{\sum_{j=1}^d x_j^2}_{=x^2} \underbrace{\frac{1}{d} \sum_{l=1}^d y_l^2}_{=y^2} - 2 \underbrace{\sum_{k=1}^d x_k^4}_{=dx_i^4} \underbrace{\frac{1}{d} \sum_{l=1}^d y_l^4}_{=dy_j^4} \\
&= \frac{3}{d^2} x^4 y^4 - 2dx_i^4 y_j^4. \quad (337)
\end{aligned}$$

■

Utilisant l'antisymétrie de  $(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})^{2k+1}$ , l'Eq. (334), ainsi que le lemme 3.5, les relations 323

à (333) deviennent

$$c_1^2(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2) = (C^2 + \frac{1}{4}c_{12}^2)(C^2 - \frac{1}{4}c_{12}^2) + \dots, \quad (338)$$

$$c_1^2 c_2^2(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2) = \left[ (C^2 + \frac{1}{4}c_{12}^2)^2 - \frac{1}{d}C^2 c_{12}^2 \right] (C^2 - \frac{1}{4}c_{12}^2) + \dots, \quad (339)$$

$$c_1^4(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2) = \left[ (C^2 + \frac{1}{4}c_{12}^2)^2 + \frac{1}{d}c^2 c_{12}^2 \right] (C^2 - \frac{1}{4}c_{12}^2) + \dots, \quad (340)$$

$$c_1^2 c_2^4 = (C^2 + \frac{1}{4}c_{12}^2) \left[ (C^2 + \frac{1}{4}c_{12}^2)^2 + \frac{1}{d}C^2 c_{12}^2 \right] + \dots, \quad (341)$$

$$c_1^2 c_2^2 = (C^2 + \frac{1}{4}c_{12}^2)^2 - \frac{1}{d}C^2 c_{12}^2, \quad (342)$$

$$c_1^6(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2) = (C^2 - \frac{1}{4}c_{12}^2) \left[ (C^2 + \frac{1}{4}c_{12}^2)^3 + \frac{3}{d}C^2 c_{12}^2 (C^2 + \frac{1}{4}c_{12}^2) \right] + \dots, \quad (343)$$

$$c_1^4 c_2^4 = (C^2 + \frac{1}{4}c_{12}^2)^4 + \frac{3}{d^2}C^4 c_{12}^4 - 2dC_i^4 c_{12j}^4 - \frac{2}{d}C^2 c_{12}^2 (C^2 + \frac{1}{4}c_{12}^2)^2 + \dots, \quad (344)$$

$$c_1^4 c_2^2(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2) = (C^2 - \frac{1}{4}c_{12}^2) \left[ (C^2 + \frac{1}{4}c_{12}^2)^3 - \frac{1}{d}C^2 c_{12}^2 (C^2 + \frac{1}{4}c_{12}^2) \right] + \dots, \quad (345)$$

$$c_1^2 c_2^6 = (C^2 + \frac{1}{4}c_{12}^2)^4 - \frac{3}{d^2}C^4 c_{12}^4 + 2dC_i^4 c_{12j}^4 + \dots, \quad (346)$$

$$c_1^6 c_2^2(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2) = (C^2 - \frac{1}{4}c_{12}^2) \left[ (C^2 + \frac{1}{4}c_{12}^2)^4 - \frac{3}{d^2}C^4 c_{12}^4 + 2dC_i^4 c_{12j}^4 \right] + \dots, \quad (347)$$

$$c_1^4 c_2^6 = (C^2 + \frac{1}{4}c_{12}^2)^5 - \frac{2}{d}C^2 c_{12}^2 (C^2 + \frac{1}{4}c_{12}^2)^3 + \frac{3}{d^2}C^4 c_{12}^4 (C^2 + \frac{1}{4}c_{12}^2) - 2dC_i^4 c_{12j}^4 (C^2 + \frac{1}{4}c_{12}^2) + \dots \quad (348)$$

Comme  $c_1^4 c_2^4 = c_1^4 c_2^2$  et  $c_1^2(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2) = c_2^2(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2)$  il y a deux termes en moins. On remplace le tout dans l'Eq. (317), choisit la composante  $i = j = 1$  dans les Eqs. (344), (346), (347), et (348), puis développe à l'aide d'un *logiciel de calcul symbolique* pour obtenir :

$$H(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2) = \sum_{(i,j) \in \Omega_\alpha} \alpha_{i,j} C^i c_{12}^j + \sum_{(i,j) \in \Omega_\gamma} \gamma_{i,j} C^i c_{12}^j C_1^4 c_{12,1}^4, \quad (349)$$

où  $\alpha_{i,j}$  et  $\gamma_{i,j}$  sont des coefficients indépendants de  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{c}_{12}$ , et

$$\Omega_\alpha = \left\{ (10, 0); (8, 0); (8, 2); (6, 0); (6, 2); (6, 4); (4, 0); (4, 2); (4, 4); (4, 6); (2, 0); (2, 2); (2, 4); (2, 6); (2, 8) \right\}, \quad (350)$$

$$\Omega_\gamma = \{(0, 2)\}. \quad (351)$$

L'Eq. (349) dans (316) avec  $c_1^2 + c_2^2 = 2C^2 + c_{12}^2/2$  donne

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v}_1 S_i(\mathbf{v}_1) L_a[\mathcal{M}S_i] &= \sigma^{d-1} \beta_1 \frac{n^2}{\pi^d} \frac{m^2}{4} v_T^7 \sum_{(i,j) \in \Omega_\alpha} \alpha_{i,j} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{C} e^{-2C^2} C^i}_{\doteq I^2[i]} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{c}_{12} e^{-c_{12}^2/2} c_{12}^{j+1}}_{\doteq I^{1/2}[j+1]} \\ &+ \sigma^{d-1} \beta_1 \frac{n^2}{\pi^d} \frac{m^2}{4} v_T^7 \sum_{(i,j) \in \Omega_\gamma} \gamma_{i,j} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{C} e^{-2C^2} C^i C_1^4}_{\doteq b^2[i]} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{c}_{12} e^{-c_{12}^2/2} c_{12}^{j+1} c_{12,1}^4}_{\doteq b^{1/2}[j+1]}. \end{aligned} \quad (352)$$

On utilise

$$I^a[n] \doteq \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{x} |\mathbf{x}|^n e^{-ax^2} = \frac{\pi^{d/2}}{a^{(d+n)/2}} \frac{\Gamma(\frac{d+n}{2})}{\Gamma(d/2)}. \quad (353)$$

Le calcul de  $M^2[i]$  et  $M^{1/2}[j+1]$  est plus compliqué que celui de  $J^a[i]$ . De plus, nous aurons par la suite des intégrales similaires mais encore légèrement plus compliquées. C'est pourquoi nous énonçons et prouvons ici deux lemmes dont un cas particulier donne  $M^2[i]$  et  $M^{1/2}[j+1]$ .

**Lemme 3.6** *Soit  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ ,  $a > 0$ ,  $d \geq 2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , alors :*

$$M_{ij}[n] \doteq \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{x} |\mathbf{x}|^n e^{-ax^2} x_i x_j = \pi^{(d-1)/2} 2^{d-3} \frac{d+n}{d} \frac{\Gamma\left(\frac{d+n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)}{\Gamma(d-1)} \frac{1}{a^{(d+n+2)/2}} \delta_{ij}. \quad (354)$$

**Preuve.** l'intégration ne dépendant pas de l'orientation du repère, alors  $M_{ii}[n] = M_{jj}[n] \doteq M \forall i, j$ . De plus, par définition  $M_{ij}[n] = M_{ji}[n]$ , et par invariance sous rotations du repère  $M_{ij}[n] = M_{i+1, j+1}[n] \forall i, j$ . Ainsi

$$M_{ij}[n] = M \delta_{ij} + C(1 - \delta_{ij}). \quad (355)$$

Nous montrons à présent que  $C = 0$ . Pour ceci, il suffit de le vérifier pour un choix donné de  $i$  et  $j$  :

$$\begin{aligned} M_{12}[n] &= \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{x} |\mathbf{x}|^n e^{-ax^2} x_1 x_2 \\ &= \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta_1 \dots \int_0^\pi d\theta_{d-1} r^n e^{-ar^2} r^2 \cos \varphi \sin \varphi \left( \prod_{k=1}^{d-2} (\sin \theta_k)^2 \right) r^{d-1} \left( \prod_{k=1}^{d-2} (\sin \theta_k)^k \right) \\ &= \int_0^\infty dr r^{n+d-1} e^{-ar^2} \left( \prod_{k=1}^{d-2} \int_0^\pi d\theta_k (\sin \theta_k)^k \right) \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi \cos \varphi \sin \varphi}_{=0} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (356)$$

Ainsi  $M_{ij} = M\delta_{ij}$ , avec

$$\begin{aligned}
M &= \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{x} |\mathbf{x}^n| e^{-a\mathbf{x}^2} x_1^2 \\
&= \int_0^\infty r^n e^{-ar^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta_1 \dots \int_0^\pi d\theta_{d-2} r^2 \cos^2 \varphi \left( \prod_{k=1}^{d-2} (\sin \theta_k)^2 \right) r^{d-1} \left( \prod_{k=1}^{d-1} (\sin \theta_k)^k \right) \\
&= \underbrace{\int_0^\infty dr r^{n+d+1} e^{-ar^2}}_{= \frac{1}{2} \frac{\pi^{1/2}}{a^{(1+n+d+1)/2}} \frac{\Gamma(\frac{1+n+d+1}{2})}{\Gamma(1/2)}} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi \cos^2 \varphi \prod_{k=1}^{d-2} \int_0^\pi d\theta_k (\sin \theta_k)^{k+2}}_{= \pi} \\
&= \frac{\pi}{2} \frac{n+d}{2} \Gamma\left(\frac{n+d}{2}\right) \frac{1}{a^{(n+d+2)/2}} \prod_{k=1}^{d-2} \underbrace{\int_0^\pi d\theta (\sin \theta)^{k+2}}_{= \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{k+3}{2})}{\Gamma(\frac{k+4}{2})}} \\
&= \frac{\pi}{4} (n+d) \frac{\Gamma(\frac{n+d}{2})}{a^{(n+d+2)/2}} \prod_{k=1}^{d-2} \sqrt{\pi} \frac{k+1}{2} \frac{2}{k+2} \frac{2}{k} \frac{\Gamma(\frac{k+1}{2})}{\Gamma(\frac{k}{2})} \\
&= \frac{\pi}{4} (n+d) \frac{\Gamma(\frac{n+d}{2})}{a^{(n+d+2)/2}} \pi^{(d-2)/2} 2^{d-2} \underbrace{\left( \prod_{k=1}^{d-2} \frac{k+1}{k(k+2)} \right)}_{= \frac{2^{(d-1)}}{\Gamma(d+1)}} \underbrace{\left( \prod_{k=1}^{d-2} \frac{\Gamma(\frac{k+1}{2})}{\Gamma(k/2)} \right)}_{= \frac{\Gamma(\frac{(d-2)+1}{2})}{\Gamma(1/2)}} \\
&= \pi^{(d-1)/2} 2^{d-3} (d+n)(d-1) \frac{\Gamma(\frac{d+n}{2}) \Gamma(\frac{d-1}{2})}{\Gamma(d+1)} \frac{1}{a^{(d+n+2)/2}} \\
&= \pi^{(d-1)/2} 2^{d-3} \frac{d+n}{d} \frac{\Gamma(\frac{d+n}{2}) \Gamma(\frac{d-1}{2})}{\Gamma(d-1)} \frac{1}{a^{(d+n+2)/2}}, \tag{357}
\end{aligned}$$

ce qui est bien le résultat cherché. On vérifie de plus explicitement par calcul direct que le lemme reste valable en dimension  $d = 2$  ( $d = 3$ ). On constate, utilisant l'identité

$$\frac{\Gamma(\frac{d-1}{2})}{\Gamma(d-1)} = \frac{2^{2-d} \sqrt{\pi}}{\Gamma(d/2)}, \tag{358}$$

que la relation (357) s'écrit aussi

$$M = \pi^{d/2} \frac{d+n}{2d} \frac{\Gamma[(d+n)/2]}{\Gamma(d/2)} \frac{1}{a^{(d+n+2)/2}}. \tag{359}$$

■

**Lemme 3.7** Soit  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ ,  $a > 0$ ,  $d \geq 2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , alors :

$$\begin{aligned}
M_{ijkl}[n] &\doteq \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{x} |\mathbf{x}|^n e^{-a\mathbf{x}^2} x_i x_j x_k x_l \\
&= 3\pi^{(d-1)/2} 2^{d-4} \frac{(d+n)(d+n+2)}{d(d+2)} \frac{\Gamma(\frac{d+n}{2}) \Gamma(\frac{d-1}{2})}{\Gamma(d-1)} \frac{1}{a^{(d+n+4)/2}} \times \\
&\quad \times \left\{ \delta_{ijkl} + \frac{1}{3} \left[ \delta_{ij} \delta_{kl} (1 - \delta_{ik}) + \delta_{ik} \delta_{jl} (1 - \delta_{ij}) + \delta_{il} \delta_{jk} (1 - \delta_{ij}) \right] \right\}. \tag{360}
\end{aligned}$$

**Preuve.** à nouveau, l'intégrale ne dépend pas de l'orientation du repère d'où

$$M_{iiii}[n] = M_{jjjj}[n] \doteq b, \quad \forall i, j. \quad (361)$$

Pour les mêmes raisons que précédemment, pour que  $M_{ijkl}$  soit non nul il faut que  $(i, j) = (k, l)$ , ou  $(i, k) = (j, l)$ , ou  $(i, l) = (j, k)$ . Ainsi :

$$M_{ijkl}[n] = b\delta_{ijkl} + c(1 - \delta_{ijkl})(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (362)$$

$$= b\delta_{ijkl} + c\left[\delta_{ij}\delta_{kl}(1 - \delta_{ik}) + \delta_{ik}\delta_{jl}(1 - \delta_{ij}) + \delta_{il}\delta_{jk}(1 - \delta_{ij})\right], \quad (363)$$

avec

$$\begin{aligned} b &= \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{x} |\mathbf{x}|^n e^{-ax^2} x_1^4 \\ &= \int_0^\infty dr r^n e^{-ar^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta_1 \dots \int_0^\pi d\theta_{d-2} r^4 \cos^4 \varphi \left( \prod_{k=1}^{d-2} (\sin \theta_k)^4 \right) r^{d-1} \left( \prod_{k=1}^{d-2} (\sin \theta)^k \right) \\ &= \underbrace{\int_0^\infty dr r^{d+n+3} e^{-ar^2}}_{= \frac{1}{2} \frac{\pi^{1/2}}{a^{(1+n+d+3)/2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1+n+d+3}{2}\right)}{\Gamma(1/2)}} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi \cos^4 \varphi}_{= \frac{3\pi}{4}} \prod_{k=1}^{d-2} \underbrace{\int_0^\pi d\theta (\sin \theta)^{k+4}}_{= \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{k+5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+6}{2}\right)}} \\ &= \frac{3\pi}{8} \pi^{(d-2)/2} \frac{d+n+2}{2} \frac{d+n}{2} \Gamma\left(\frac{d+n}{2}\right) \frac{1}{a^{(d+n+4)/2}} \prod_{k=1}^{d-2} \frac{k+3}{2} \frac{k+1}{2} \frac{2}{k+4} \frac{2}{k+2} \frac{2}{k} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma(k/2)} \\ &= \frac{3}{32} 2^{d-2} \pi^{d/2} (d+n)(d+n+2) \Gamma\left(\frac{d+n}{2}\right) \frac{1}{a^{(d+n+4)/2}} \underbrace{\left( \prod_{k=1}^{d-2} \frac{(k+1)(k+3)}{k(k+2)(k+4)} \right)}_{= \frac{8(d+1)(d-1)}{\Gamma(d+3)}} \underbrace{\left( \prod_{k=1}^{d-2} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma(k/2)} \right)}_{= \frac{\Gamma\left(\frac{(d-2)+1}{2}\right)}{\Gamma(1/2)}} \\ &= 3\pi^{(d-1)/2} 2^{d-4} (d+n)(d+n+2)(d+1)(d-1) \frac{\Gamma\left(\frac{d+n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)}{\Gamma(d+3)} \frac{1}{a^{(d+n+4)/2}} \\ &= 3\pi^{(d-1)/2} 2^{d-4} \frac{(d+n)(d+n+2)}{d(d+2)} \frac{\Gamma\left(\frac{d+n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)}{\Gamma(d-1)} \frac{1}{a^{(d+n+4)/2}}. \end{aligned} \quad (364)$$

D'autre part

$$\begin{aligned} c &= \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{x} |\mathbf{x}|^n e^{-ax^2} x_1^2 x_2^2 \\ &= \int_0^\infty dr r^n e^{-ar^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta_1 \dots \int_0^\pi d\theta_{d-1} r^4 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \left( \prod_{k=1}^{d-2} (\sin \theta_k)^4 \right) r^{d-1} \left( \prod_{k=1}^{d-2} (\sin \theta_k)^k \right) \\ &= \frac{b}{\int_0^{2\pi} d\varphi \cos^4 \varphi \int_0^{2\pi} d\varphi \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi} \int_0^{2\pi} d\varphi \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \\ &= b \frac{4}{3\pi} \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{b}{3}. \end{aligned} \quad (365)$$

Les Eqs. (364) et (365) dans (363) fournissent le résultat cherché. A nouveau, on vérifie que cette relation est aussi valable en dimension  $d = 2$ . A nouveau, utilisant

$$\frac{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)}{\Gamma(d-1)} = \frac{2^{2-d} \sqrt{\pi}}{\Gamma(d/2)}, \quad (366)$$

la relation (365) s'écrit aussi

$$b = \pi^{d/2} \frac{3}{4} \frac{(d+n)(d+n+2)}{d(d+2)} \frac{\Gamma[(d+n)/2]}{\Gamma(d/2)} \frac{1}{a^{(d+n+4)/2}}. \quad (367)$$

■

Le cas particulier  $i = j = k = l$  du second lemme fournit les relations cherchées :

$$b^a[n] = 3\pi^{(d-1)/2} 2^{d-4} \frac{(d+n)(d+n+2)}{d(d+2)} \frac{\Gamma(\frac{d+n}{2}) \Gamma(\frac{d-1}{2})}{\Gamma(d-1)} \frac{1}{a^{(d+n+4)/2}}. \quad (368)$$

Les Eqs. (353) et (368) dans (352) donnent

$$\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v}_1 S_i(\mathbf{v}_1) L_a[\mathcal{M}S_i] = \sigma^{d-1} \beta_1 \frac{n^2}{\pi^d} \frac{m^2}{4} v_T^7 \left[ \sum_{(i,j) \in \Omega_\alpha} \alpha_{i,j} I^2[i] I^{1/2}[j+1] + \sum_{(i,j) \in \Omega_\gamma} \gamma_{i,j} b^2[i] b^{1/2}[j+1] \right] \quad (369)$$

où  $\beta_1 = \pi^{(d-1)/2} / \Gamma[(d+1)/2]$ ,  $v_T^2 = 2/(\beta m)$ . De l'Eq. (286) on obtient la contribution aux coefficients de transport  $\nu_\kappa^*$  et  $\nu_\mu^*$  due à l'annihilation, ces derniers étant notés  $\nu_\kappa^{*a}$  et  $\nu_\mu^{*a}$  :

$$\begin{aligned} \nu_\kappa^{*a} = \nu_\mu^{*a} &= \frac{2m\beta^3}{d(d+2)n\nu_0} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v}_1 S_i(\mathbf{v}_1) L_a[\mathcal{M}S_i], \quad \nu_0^{-1} = \frac{d+2}{8} \frac{\Gamma(d/2)}{\pi^{(d-1)/2}} \frac{\sqrt{mk_B T}}{\sigma^{d-1}} \frac{1}{nk_B T}, \\ &= \frac{2m\beta^3}{d(d+2)} \frac{1}{n} \frac{d+2}{8} \frac{\Gamma(d/2)}{\pi^{(d-1)/2}} \frac{\sqrt{mk_B T}}{\sigma^{d-1}} \frac{1}{nk_B T} \sigma^{d-1} \beta_1 \frac{n^2}{\pi^d} \frac{m^2}{4} v_T^7 \times \\ &\quad \times \left[ \sum_{(i,j) \in \Omega_\alpha} \alpha_{i,j} I^2[i] I^{1/2}[j+1] + \sum_{(i,j) \in \Omega_\gamma} \gamma_{i,j} b^2[i] b^{1/2}[j+1] \right] \\ &= \frac{1}{d} \frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma(\frac{d+1}{2})} \frac{1}{\pi^d \sqrt{2}} \left[ \sum_{(i,j) \in \Omega_\alpha} \alpha_{i,j} I^2[i] I^{1/2}[j+1] + \sum_{(i,j) \in \Omega_\gamma} \gamma_{i,j} b^2[i] b^{1/2}[j+1] \right], \quad (370) \end{aligned}$$

que l'on développe à l'aide d'un *logiciel de calcul symbolique* pour obtenir :

$$\boxed{\nu_\kappa^{*a} = \nu_\mu^{*a} = \frac{16 + 27d + 8d^2}{32d} - a_2 \frac{-2880 - 1544d + 2658d^2 + 1539d^3 + 200d^4}{32d(d+2)}}. \quad (371)$$

### 3.3.4.2 Calcul de $L_a$ avec $X = Y = D_{ij}(\mathbf{V}) : \nu_\eta^*$

On doit calculer la grandeur

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v}_1 D_{ij}(\mathbf{V}_1) L_a[\mathcal{M}D_{ij}] &= \sigma^{d-1} \beta_1 \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 |\mathbf{v}_{12}| \frac{n}{v_T^2} \frac{1}{\pi^{d/2}} e^{-V_1^2/v_T^2} \frac{n}{v_T^2} \frac{1}{\pi^{d/2}} e^{-V_2^2/v_T^2} \times \\ &\quad \times \left[ 1 + a_2 S_2 \left( \frac{V_1^2}{v_T^2} \right) \right] [D_{ij}(\mathbf{v}_2) D_{ij}(\mathbf{v}_1) + D_{ij}(\mathbf{v}_2) D_{ij}(\mathbf{v}_2)]. \quad (372) \end{aligned}$$

Soit le changement de variables  $\mathbf{c}_i = \mathbf{V}_i/v_T$ ,  $d\mathbf{c}_i = d\mathbf{V}_i/v_T^d$  :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v}_1 D_{ij}(\mathbf{V}_1) L_a[\mathcal{M}D_{ij}] &= \sigma^{d-1} \beta_1 \frac{n^2}{\pi^d} \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\mathbf{c}_1 d\mathbf{c}_2 v_T |\mathbf{c}_{12}| e^{-c_1^2 - c_2^2} \left[ 1 + a_2 S_2 \left( \frac{V_1^2}{v_T^2} \right) \right] \times \\
&\times \left[ m^2 \underbrace{\left( V_{1i} V_{1j} - \frac{V_1^2}{d} \delta_{ij} \right) \left( V_{2i} V_{2j} - \frac{V_2^2}{d} \delta_{ij} \right)}_{\substack{= (\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2)^2 - \frac{1}{d} V_1^2 V_2^2 \\ = v_T^4 (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2)^2 - v_T^4 \frac{1}{d} c_1^2 c_2^2}} \right. \\
&+ \left. m^2 \underbrace{\left( V_{2i} V_{2j} - \frac{V_2^2}{d} \delta_{ij} \right) \left( V_{2i} V_{2j} - \frac{V_2^2}{d} \delta_{ij} \right)}_{\substack{= V_2^4 - \frac{1}{d} V_2^4 \\ = v_T^4 \frac{d-1}{d} c_2^4}} \right] \\
&= \sigma^{d-1} \beta_1 \frac{m^2 n^2 v_T^5}{\pi^d d} \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\mathbf{c}_1 d\mathbf{c}_2 |\mathbf{c}_{12}| e^{-c_1^2 - c_2^2} \times \\
&\times \underbrace{(1 + Ac_1^4 + Bc_1^2 + D) [d(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2)^2 - c_1^2 c_2^2 + (d-1)c_2^4]}_{\doteq H(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2)}, \quad (373)
\end{aligned}$$

où  $A$ ,  $B$ , et  $D$  sont donnés par les Eqs. (310), (311), et (312) respectivement. Ainsi

$$\begin{aligned}
H(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2) &= (1 + D)d(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2)^2 - (1 + D)c_1^2 c_2^2 + (1 + D)(d-1)c_2^4 + Adc_1^4 (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2)^2 - Ac_1^6 c_2^2 \\
&+ A(d-1)c_1^4 c_2^4 + Bdc_1^2 (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2)^2 - \underbrace{Bc_1^4 c_2^2 + B(d-1)c_1^2 c_2^4}_{= B(d-2)c_1^2 c_2^4}. \quad (374)
\end{aligned}$$

On passe dans les coordonnées relatives et du centre de masse, avec :

$$(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2)^2 \stackrel{(319)}{=} \left( C^2 - \frac{1}{4} c_{12}^2 \right)^2, \quad (375)$$

$$c_1^2 c_2^2 \stackrel{(342)}{=} \left( C^2 + \frac{1}{4} c_{12}^2 \right)^2 - \frac{1}{d} C^2 c_{12}^2 + \dots, \quad (376)$$

$$c_2^4 \stackrel{(321)}{=} \left( C^2 + \frac{1}{4} c_{12}^2 \right)^2 + \frac{1}{d} C^2 c_{12}^2 + \dots, \quad (377)$$

$$c_1^4 (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2)^2 \stackrel{(321)}{=} \left( C^2 - \frac{1}{4} c_{12}^2 \right)^2 \left[ \left( C^2 + \frac{1}{4} c_{12}^2 \right)^2 + \frac{1}{d} C^2 c_{12}^2 \right] + \dots, \quad (378)$$

$$c_1^6 c_2^2 \stackrel{(347)}{=} \left( C^2 + \frac{1}{4} c_{12}^2 \right)^4 - \frac{3}{d^2} C^4 c_{12}^4 + 2dC_i^4 c_{12j}^4 + \dots, \quad (379)$$

$$c_1^4 c_2^4 \stackrel{(344)}{=} \left( C^2 + \frac{1}{4} c_{12}^2 \right)^4 + \frac{3}{d^2} C^4 c_{12}^4 - 2dC_i^4 c_{12j}^4 - \frac{2}{d} C^2 c_{12}^2 \left( C^2 + \frac{1}{4} c_{12}^2 \right)^2 + \dots, \quad (380)$$

$$c_1^2 (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2)^2 \stackrel{(320)}{=} \left( C^2 - \frac{1}{4} c_{12}^2 \right)^2 \left( C^2 + \frac{1}{4} c_{12}^2 \right) + \dots, \quad (381)$$

$$c_1^2 c_2^4 \stackrel{(341)}{=} \left( C^2 + \frac{1}{4} c_{12}^2 \right)^2 \left[ \left( C^2 + \frac{1}{4} c_{12}^2 \right)^2 - \frac{1}{d} C^2 c_{12}^2 \right] + \dots \quad (382)$$

On développe l'Eq. (374) à l'aide d'un *logiciel de calcul symbolique* pour obtenir (en choisissant à nouveau  $i = j = 1$  dans les Eqs. (379) et (380)) :

$$H(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2) = \sum_{(i,j) \in \Omega_\alpha} \alpha_{i,j} C^i c_{12}^j + \sum_{(i,j) \in \Omega_\gamma} \gamma_{i,j} C^i c_{12}^j C_1^4 c_{12,1}^4, \quad (383)$$

avec

$$\begin{aligned}\Omega_\alpha &= \{(8, 0); (6, 0); (6, 2); (4, 0); (4, 2); (4, 4); (2, 4); (2, 6); (0, 4); (0, 6); (0, 8)\}, \\ \Omega_\gamma &= \{(0, 0)\}.\end{aligned}$$

Ainsi l'Eq. (383) dans (373) fournit

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v}_1 D_{ij}(\mathbf{V}_1) L_a[\mathcal{M}D_{ij}] &= \sigma^{d-1} \beta_1 \frac{m^2 n^2 v_T^5}{\pi^d d} \sum_{(i,j) \in \Omega_\alpha} \alpha_{i,j} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{c}_1 e^{-2C^2} C^i}_{\doteq I^2[i]} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{c}_{12} e^{-c_{12}^2/2} c_{12}^{j+1}}_{\doteq I^{1/2}[j+1]} \\ &+ \sigma^{d-1} \beta_1 \frac{m^2 n^2 v_T^5}{\pi^d d} \sum_{(i,j) \in \Omega_\gamma} \gamma_{i,j} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{c}_1 e^{-2C^2} C^i C_1^4}_{\doteq b^2[i]} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{c}_{12} e^{-c_{12}^2/2} c_{12}^{j+1} c_{12,1}^4}_{\doteq b^{1/2}[j+1]}.\end{aligned}\quad (384)$$

De l'Eq. (286) on obtient la contribution au coefficient de transport  $\nu_\eta^*$  due à l'annihilation, notée  $\nu_\eta^{*a}$  :

$$\begin{aligned}\nu_\eta^{*a} &= \frac{\beta^2}{(d+2)(d-1)n\nu_0} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v}_1 D_{ij}(\mathbf{V}_1) L_a[\mathcal{M}D_{ij}], \quad \nu_0^{-1} = \frac{d+2}{8} \frac{\Gamma(d/2)}{\pi^{(d-1)/2}} \frac{\sqrt{mk_B T}}{\sigma^{d-1}} \frac{1}{nk_B T}, \\ &= \frac{\beta^2}{(d+2)(d-1)n} \frac{d+2}{8} \frac{\Gamma(d/2)}{\pi^{(d-1)/2}} \frac{\sqrt{mk_B T}}{\sigma^{d-1}} \frac{1}{nk_B T} \sigma^{d-1} \frac{m^2 n^2 v_T^5}{\pi^d d} \times \\ &\quad \times \left[ \sum_{(i,j) \in \Omega_\alpha} \alpha_{i,j} I^{1/2}[i] I^2[j+1] \sum_{(i,j) \in \Omega_\gamma} \gamma_{i,j} I^{1/2}[i] I^2[j+1] \right] \\ &= \frac{1}{d(d-1)} \frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)} \frac{1}{\pi^2 \sqrt{2}} \left[ \sum_{(i,j) \in \Omega_\alpha} \alpha_{i,j} I^{1/2}[i] I^2[j+1] \sum_{(i,j) \in \Omega_\gamma} \gamma_{i,j} I^{1/2}[i] I^2[j+1] \right],\end{aligned}\quad (385)$$

que l'on développe à l'aide d'un *logiciel de calcul symbolique* pour trouver :

$$\boxed{\nu_\eta^{*a} = \frac{3 + 6d + 2d^2}{8d} - a_2 \frac{278 + 375d - 96d^2 - 2d^3}{256d(d+2)}}.\quad (386)$$

### 3.3.4.3 Calcul de $L_c$ avec $X = Y = D_{ij}(\mathbf{V}) : \nu_\eta^*$

Utilisant le lemme 3.4, on doit calculer

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v}_1 D_{ij}(\mathbf{v}_1) L_c[\mathcal{M}D_{ij}] &= -\sigma^{d-1} \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 f^{(0)}(\mathbf{v}_1) \mathcal{M}(\mathbf{v}_2) D_{ij}(\mathbf{v}_2) \times \\ &\quad \times \int d\hat{\boldsymbol{\sigma}} \theta(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{v}_{12}) (\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{v}_{12}) (b-1) [D_{ij}(\mathbf{v}_1) + D_{ij}(\mathbf{v}_2)],\end{aligned}\quad (387)$$

avec

$$D_{ij}(\mathbf{V}) = m \left( V_i V_j - \frac{1}{d} V^2 \delta_{ij} \right),\quad (388)$$

$$b\mathbf{V}_\frac{1}{2} = \mathbf{V}_\frac{1}{2} \mp (\mathbf{V}_{12} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}) \hat{\boldsymbol{\sigma}}.\quad (389)$$

On a donc

$$(b-1) [D_{ij}(\mathbf{v}_1) + D_{ij}(\mathbf{v}_2)] = m(b-1) [V_{1i} V_{1j} + V_{2i} V_{2j}] + \underbrace{m(b-1) \left[ -\frac{1}{d} V_1^2 \delta_{ij} - \frac{1}{d} V_2^2 \delta_{ij} \right]}_{(1)},\quad (390)$$

où

$$\begin{aligned}
(1) &= -\frac{m}{d}\delta_{ij}(b-1)(V_1^2 + V_2^2) \\
&= -\frac{m}{d}\delta_{ij}\left\{-V_1^2 - V_2^2 + [\mathbf{V}_1 - (\mathbf{V}_{12} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}})\hat{\boldsymbol{\sigma}}]^2 + [\mathbf{V}_2 + (\mathbf{V}_{12} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}})\hat{\boldsymbol{\sigma}}]^2\right\} \\
&= -\frac{m}{d}\delta_{ij}\left[-V_1^2 - V_2^2 + V_1^2 - 2(\mathbf{V}_{12} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}})(\mathbf{V}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}) + (\mathbf{V}_{12} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}})^2 + V_2^2\right. \\
&\quad \left.+ 2(\mathbf{V}_{12} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}})(\mathbf{V}_2 \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}) + (\mathbf{V}_{12} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}})^2\right] \\
&= -2\frac{m}{d}\delta_{ij}(\mathbf{V}_{12} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}})[-(\mathbf{V}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}) + (\mathbf{V}_2 \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}) + (\mathbf{V}_{12} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}})] \\
\mathbf{V}_{12} &= \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2 \quad 0.
\end{aligned} \tag{391}$$

Les Eqs. (390) et (391) dans (387) fournit

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v}_1 D_{ij}(\mathbf{v}_1) L_c[\mathcal{M}D_{ij}] &= -m\sigma^{d-1} \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 f^{(0)}(\mathbf{v}_1) \mathcal{M}(\mathbf{v}_2) D_{ij}(\mathbf{v}_2) \times \\
&\quad \times \int d\hat{\boldsymbol{\sigma}} \theta(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{v}_{12})(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{v}_{12})(b-1) [V_{1i}V_{1j} + V_{2i}V_{2j}], \tag{392}
\end{aligned}$$

A l'aide de la relation (389), en notant  $\mathbf{g} = \mathbf{v}_{12}$  on obtient

$$\begin{aligned}
(b-1) [V_{1i}V_{1j} + V_{2i}V_{2j}] &= [V_{1i} - (\mathbf{g} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}})\sigma_i][V_{1j} - (\mathbf{g} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}})\sigma_j] \\
&\quad + [V_{2i} - (\mathbf{g} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}})\sigma_i][V_{2j} - (\mathbf{g} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}})\sigma_j] - V_{1i}V_{1j} - V_{2i}V_{2j} \\
&= -V_{1i}(\mathbf{g} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}})\sigma_j - V_{1j}(\mathbf{g} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}})\sigma_i + V_{2i}(\mathbf{g} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}})\sigma_j + V_{2j}(\mathbf{g} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}})\sigma_i \\
&\quad + 2(\mathbf{g} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}})^2\sigma_i\sigma_j \\
&= -\underbrace{V_{1i} - V_{2i}}_{=g_i}(\mathbf{g} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}})\sigma_j - \underbrace{V_{1j} - V_{2j}}_{=g_j}(\mathbf{g} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}})\sigma_i + 2(\mathbf{g} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}})^2\sigma_i\sigma_j \\
&= (\mathbf{g} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}})[-g_i\sigma_j - g_j\sigma_i + 2(\mathbf{g} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}})\sigma_i\sigma_j].
\end{aligned} \tag{393}$$

Insérant l'Eq. (393) dans (392) il vient

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v}_1 D_{ij}(\mathbf{v}_1) L_c[\mathcal{M}D_{ij}] &= -m\sigma^{d-1} \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 f^{(0)}(\mathbf{v}_1) \mathcal{M}(\mathbf{v}_2) D_{ij}(\mathbf{v}_2) \times \\
&\quad \times \int d\hat{\boldsymbol{\sigma}} \theta(\mathbf{g} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}})(\mathbf{g} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}})^2 [-g_i\sigma_j - g_j\sigma_i + 2(\mathbf{g} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}})\sigma_i\sigma_j], \tag{394}
\end{aligned}$$

L'intégration (394) étant complexe, et comme de plus l'expression des coefficients de transport du gaz inélastique en dimension arbitraire sont donnés dans la littérature [14], il n'est pas nécessaire de refaire le calcul. Seuls les résultats finaux, sans calculs intermédiaires, sont donnés. Néanmoins, nous allons vérifier explicitement l'expression finale fournie dans le cas particulier de trois dimensions pour le gaz inélastique. Nous verrons que le résultat final est indépendant de la dimension, et donc le calcul à trois dimensions est valable pour toute dimension. Pour complétude, la démarche à  $d$  dimensions s'obtient grâce aux relations suivantes.

Soit  $\mathbf{g}, \hat{\boldsymbol{\sigma}} = (\sigma_1, \dots, \sigma_d) \in \mathbb{R}^d$ ,  $|\hat{\boldsymbol{\sigma}}| = 1$ . Nous adoptons la notation  $\int d\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \int_{|\mathbf{x}|=1} dx$ . Dans les intégrales ci-dessous, les résultats lorsque  $\theta(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{g})$  est absent s'obtiennent en multipliant  $\beta_n$  par deux.

$$\int d\hat{\boldsymbol{\sigma}} \theta(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{g})(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{g})^n \sigma_i \sigma_j = \frac{\beta_n}{n+d} g^{n-2} (ng_i g_j + g^2 \delta_{ij}), \tag{395}$$

$$\int d\hat{\boldsymbol{\sigma}} \theta(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{g})(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{g})^n \sigma_i = \beta_{n+1} g^{n-1} g_i, \tag{396}$$

$$\beta_n = \int d\hat{\boldsymbol{\sigma}} \theta(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{g})(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{g})^n = \pi^{(d-1)/2} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+d}{2}\right)}. \tag{397}$$

Notons  $\tilde{\alpha} \in [0, 1]$  le coefficient de restitution, alors la loi de collision s'écrit

$$b\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1 \mp \frac{1 + \tilde{\alpha}}{2} (\mathbf{g} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}) \hat{\boldsymbol{\sigma}}, \quad (398)$$

Dans ce cas, l'Eq. (394) prend la forme

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v}_1 D_{ij}(\mathbf{v}_1) L_c[\mathcal{M}D_{ij}] &= -m\sigma^{d-1} \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 f^{(0)}(\mathbf{v}_1) \mathcal{M}(\mathbf{v}_2) D_{ij}(\mathbf{v}_2) \times \\ &\times \frac{1 + \tilde{\alpha}}{2} \int d\hat{\boldsymbol{\sigma}} \theta(\mathbf{g} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}) (\mathbf{g} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}})^2 [-g_i \sigma_j - g_j \sigma_i + (1 + \tilde{\alpha})(\mathbf{g} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}) \sigma_i \sigma_j]. \end{aligned} \quad (399)$$

Le cas particulier élastique s'obtiendra naturellement en prenant la limite  $\tilde{\alpha} \rightarrow 1$  dans l'expression finale des coefficients de transport.

**Lemme 3.8** *En dimension  $d = 3$  on a :*

$$- \int d\hat{\boldsymbol{\sigma}} \theta(\mathbf{g} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}) (\mathbf{g} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}) (b-1) (V_{1i} V_{1j} + V_{2i} V_{2j}) = \frac{\pi}{8} (1 + \tilde{\alpha}) (3 - \tilde{\alpha}) g_i g_j - \frac{\pi}{24} (1 + \tilde{\alpha})^2 g^3 \delta_{ij}, \quad (400)$$

d'où

$$\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v}_1 D_{ij}(\mathbf{v}_1) L_c[\mathcal{M}D_{ij}] = m\sigma^{d-1} \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 f^{(0)}(\mathbf{v}_1) \mathcal{M}(\mathbf{v}_2) D_{ij}(\mathbf{v}_2) \frac{\pi}{8} (1 + \tilde{\alpha}) (3 - \tilde{\alpha}) g_i g_j. \quad (401)$$

**Preuve.** supposons l'Eq. (400) vraie, alors comme  $D_{ij}$  est de trace nulle

$$D_{ij}(\mathbf{V}_2) \delta_{ij} = \text{Tr}(\mathbf{D}) = 0, \quad (402)$$

et donc la contribution du second terme du membre de droite de l'Eq. (400) est nulle, ce qui établit l'Eq. (401). Notons que l'Eq. (400) est bien l'expression intermédiaire trouvée dans [2]. Pour établir le résultat (400), choisissons un repère  $\{\tilde{\mathbf{e}}_i\}_{i=1}^3$  pour lequel  $\tilde{\mathbf{e}}_3$  est choisi dans la direction fixée  $\mathbf{g}$ . Choisissons de plus  $\tilde{\mathbf{e}}_2$  dans le sous-espace complémentaire orthogonal à  $\tilde{\mathbf{e}}_i$  et engendré par  $\{\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2$  (cf. Fig. 1)

On a dans la base canonique  $\{\hat{\mathbf{e}}_i\}_{i=1}^3$  :

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (403)$$

$$\tilde{\mathbf{e}}_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \end{pmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{e}}_2 = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{e}}_3 = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (404)$$

et on vérifie que  $\tilde{\mathbf{e}}_i \cdot \tilde{\mathbf{e}}_j = \delta_{ij}$ . L'inversion donne dans la base  $\{\tilde{\mathbf{e}}_i\}_{i=1}^3$

$$\hat{\mathbf{e}}_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ -\sin \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi \end{pmatrix}; \quad \hat{\mathbf{e}}_2 = \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \varphi \\ \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \end{pmatrix}; \quad \hat{\mathbf{e}}_3 = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ 0 \\ -\cos \theta \end{pmatrix}. \quad (405)$$

Notons qu'il existe une infinité de choix de repères tel que  $\tilde{\mathbf{e}}_3$  soit parallèle à  $\mathbf{g}$ . Nous avons pris celui qui a priori engendre les vecteurs de base les plus simples. Un autre choix peut s'avérer judicieux pour une généralisation en dimension arbitraire. Un tel repère va permettre d'exprimer simplement la condition  $\theta(\mathbf{g} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}})$ . Pour éviter toute confusion notationnelle, notons donc à présent  $\Theta$

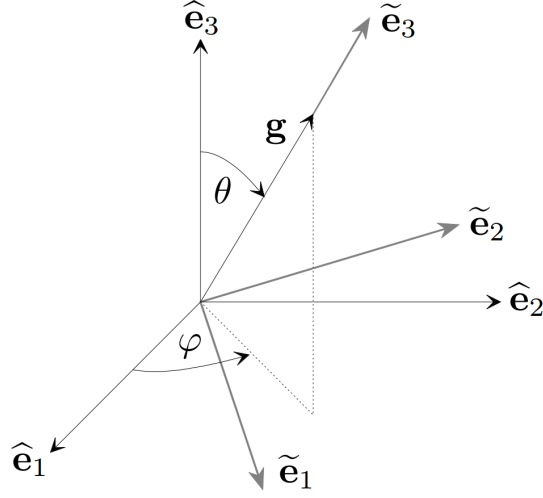


FIGURE 1 – Définition des repères.

la distribution de Heaviside. Reprenant l'Eq. (399) et notant  $\tilde{\theta}$  l'angle entre  $\mathbf{g}$  et  $\hat{\sigma}$  ainsi que  $\{\tilde{\theta}, \tilde{\varphi}\}$  les variables d'intégration sur l'angle solide, on a :

$$\begin{aligned}
-\int d\hat{\sigma} \theta(\mathbf{g} \cdot \hat{\sigma})(\mathbf{g} \cdot \hat{\sigma})(b-1)(V_{1i}V_{1j} + V_{2i}V_{2j}) &= -\frac{1+\tilde{\alpha}}{2} \int d\hat{\sigma} \Theta(\mathbf{g} \cdot \hat{\sigma})(\mathbf{g} \cdot \hat{\sigma})^2 \times \\
&\quad \times [-g_i\sigma_j - g_j\sigma_i + (1+\tilde{\alpha})(\mathbf{g} \cdot \hat{\sigma})\sigma_i\sigma_j] \\
&= -\frac{1+\tilde{\alpha}}{2} \int_0^{2\pi} d\tilde{\varphi} \int_0^\pi d\tilde{\theta} \sin\tilde{\theta} \Theta(\cos\tilde{\theta})g^2 \cos^2\tilde{\theta} \times \\
&\quad \times [-g_i\sigma_j - g_j\sigma_i + (1+\tilde{\alpha})g \cos\tilde{\theta}\sigma_i\sigma_j] \quad (406) \\
&\doteq I_{ij}.
\end{aligned}$$

Comme  $g_i$  sont les composantes cartésiennes de  $\mathbf{g}$ , il faut exprimer  $\hat{\sigma}$  dans la base canonique en fonction des angles  $\tilde{\varphi}$  et  $\tilde{\theta}$  :

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma} &= \sigma_1\hat{\mathbf{e}}_1 + \sigma_2\hat{\mathbf{e}}_2 + \sigma_3\hat{\mathbf{e}}_3 \\
&= \sin\tilde{\theta} \cos\tilde{\varphi}\tilde{\mathbf{e}}_1 + \sin\tilde{\theta} \sin\tilde{\varphi}\tilde{\mathbf{e}}_2 + \cos\tilde{\theta}\tilde{\mathbf{e}}_3 \\
&= \sin\tilde{\theta} \cos\tilde{\varphi} (\cos\theta \cos\varphi\hat{\mathbf{e}}_1 + \cos\theta \sin\varphi\hat{\mathbf{e}}_2 - \sin\theta\hat{\mathbf{e}}_3) + \sin\tilde{\theta} \sin\tilde{\varphi} (-\sin\varphi\hat{\mathbf{e}}_1 + \cos\varphi\hat{\mathbf{e}}_2) \\
&\quad + \cos\tilde{\theta} (\sin\theta \cos\varphi\hat{\mathbf{e}}_1 + \sin\theta \sin\varphi\hat{\mathbf{e}}_2 + \cos\theta\hat{\mathbf{e}}_3) \\
&= \hat{\mathbf{e}}_1 \underbrace{\left( \sin\tilde{\theta} \cos\tilde{\varphi} \cos\theta \cos\varphi - \sin\tilde{\theta} \sin\tilde{\varphi} \sin\varphi + \cos\tilde{\theta} \sin\theta \cos\varphi \right)}_{=\sigma_1} \\
&\quad + \hat{\mathbf{e}}_2 \underbrace{\left( \sin\tilde{\theta} \cos\tilde{\varphi} \cos\theta \sin\varphi + \sin\tilde{\theta} \sin\tilde{\varphi} \cos\varphi + \cos\tilde{\theta} \sin\theta \sin\varphi \right)}_{=\sigma_2} \\
&\quad + \hat{\mathbf{e}}_3 \underbrace{\left( -\sin\tilde{\theta} \cos\tilde{\varphi} \sin\theta + \cos\tilde{\theta} \cos\theta \right)}_{=\sigma_3}. \quad (407)
\end{aligned}$$

La relation à vérifier étant symétrique sous l'échange des indices, on vérifie que les 6 composantes indépendantes donnent le résultat du lemme.

- $i = j = 3$  :

$$\begin{aligned}
I_{33} &= -\frac{1+\tilde{\alpha}}{2}g^2 \int_0^{2\pi} d\tilde{\varphi} \int_0^{\pi/2} d\tilde{\theta} \sin \tilde{\theta} \cos^2 \tilde{\theta} \times \\
&\quad \times \left[ (1+\tilde{\alpha})g \cos \tilde{\theta} \underbrace{\left( -\sin \tilde{\theta} \cos \tilde{\varphi} \sin \theta + \cos \tilde{\theta} \cos \theta \right)^2}_{=\sin^2 \tilde{\theta} \cos^2 \tilde{\varphi} \sin^2 \theta + \cos^2 \tilde{\theta} \cos^2 \theta - 2 \sin \tilde{\theta} \cos \tilde{\varphi} \sin \theta \cos \tilde{\theta} \cos \theta} - 2g_3 \underbrace{\left( -\sin \tilde{\theta} \cos \tilde{\varphi} \sin \theta + \cos \tilde{\theta} \cos \theta \right)}_{\rightarrow 0} \right],
\end{aligned}$$

où on a noté par  $\rightarrow 0$  les termes dont la contribution à l'intégrale est nulle. Ainsi, notant par une flèche " $\rightarrow$ " les contributions des différents termes aux intégrales, on a

$$\begin{aligned}
I_{33} &= -\frac{1+\tilde{\alpha}}{2}g \int_0^{2\pi} d\tilde{\varphi} \int_0^{\pi/2} d\tilde{\theta} \left[ (1+\tilde{\alpha}) \underbrace{\left( \sin^3 \tilde{\theta} \cos^3 \tilde{\theta} \cos^2 \tilde{\varphi} \right)}_{\rightarrow \pi/12} \underbrace{g^2 \sin^2 \theta}_{=g^2 - g^2 \cos^2 \theta}_{=g_3^2} - 2g_3 \underbrace{g \cos \theta}_{=g_3} \underbrace{\cos^2 \tilde{\theta} \sin \tilde{\theta}}_{\rightarrow \pi/2} \right] \\
&= -\frac{1+\tilde{\alpha}}{2}\pi g \left[ (1+\tilde{\alpha}) \left( \frac{1}{12}g^2 - \frac{1}{12}g_3^2 + \frac{1}{3}g_3^2 \right) - g_3^2 \right] \\
&= \frac{\pi}{8}(1+\tilde{\alpha})(3-\tilde{\alpha})gg_3g_3 - \frac{\pi}{24}(1+\tilde{\alpha})^2g^3. \tag{408}
\end{aligned}$$

•  $i = j = 1$  :

$$\begin{aligned}
I_{11} &= -\frac{1+\tilde{\alpha}}{2}g^2 \int_0^{2\pi} d\tilde{\varphi} \int_0^{\pi/2} d\tilde{\theta} \sin \tilde{\theta} \cos^2 \tilde{\theta} \times \\
&\quad \times \left[ (1+\tilde{\alpha})g \cos \tilde{\theta} \left( \sin^2 \tilde{\theta} \cos^2 \tilde{\varphi} \cos^2 \theta \cos^2 \varphi \underbrace{- 2 \sin^2 \tilde{\theta} \cos \tilde{\varphi} \cos \theta \cos \varphi \sin \tilde{\varphi} \sin \varphi}_{\rightarrow 0} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sin^2 \tilde{\theta} \sin^2 \tilde{\varphi} \sin^2 \varphi + 2 \sin \tilde{\theta} \cos \tilde{\varphi} \cos \theta \cos^2 \varphi \cos \tilde{\theta} \sin \theta \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 2 \sin \tilde{\theta} \sin \tilde{\varphi} \sin \varphi \cos \tilde{\theta} \sin \theta \cos \varphi \right) \right. \\
&\quad \left. + \cos^2 \tilde{\theta} \sin^2 \theta \cos^2 \varphi - 2g_1 \left( \underbrace{\sin \tilde{\theta} \cos \tilde{\varphi} \cos \theta \cos \varphi}_{\rightarrow 0} - \underbrace{\sin \tilde{\theta} \sin \tilde{\varphi} \sin \varphi}_{\rightarrow 0} + \cos \tilde{\theta} \sin \theta \cos \varphi \right) \right] \\
&= -\frac{1+\tilde{\alpha}}{2}g^2 \int_0^{2\pi} d\tilde{\varphi} \int_0^{\pi/2} d\tilde{\theta} \left[ (1+\tilde{\alpha})g \underbrace{\left( \sin^3 \tilde{\theta} \cos^3 \tilde{\theta} \cos^2 \tilde{\varphi} \cos^2 \theta \cos^2 \varphi \right)}_{\rightarrow \pi/12} \right. \\
&\quad \left. + \underbrace{\sin^3 \tilde{\theta} \cos^3 \tilde{\theta} \sin^2 \tilde{\varphi} \sin^2 \varphi}_{\rightarrow \pi/12} + \underbrace{\cos^5 \tilde{\theta} \sin \tilde{\theta} \sin^2 \theta \cos^2 \theta}_{\rightarrow \pi/3} - 2g_1 \underbrace{\cos^3 \tilde{\theta} \sin \tilde{\theta} \sin \theta \cos \varphi}_{\rightarrow \pi/2} \right] \\
&\quad - \frac{\pi}{12}(1+\tilde{\alpha})g \left[ \frac{1+\tilde{\alpha}}{12}g^2 \underbrace{\left( \cos^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi + 4 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi \right)}_{=\cos^2 \theta \cos^2 \varphi + \cos^2 \varphi \sin^2 \theta + \sin^2 \varphi + 3 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta}_{=1} - 2g_1 \frac{1}{2} \underbrace{g \sin \theta \cos \varphi}_{=g_1} \right] \\
&= -\frac{\pi}{2}(1+\tilde{\alpha})gg_1^2 \underbrace{\left( \frac{1+\tilde{\alpha}}{12}3 - \frac{4}{4} \right)}_{=\frac{1}{4}(1+\tilde{\alpha}-4)} - \frac{\pi}{24}(1+\tilde{\alpha})^2g^3 \\
&= \frac{\pi}{8}(1+\tilde{\alpha})(3-\tilde{\alpha})gg_1g_1 - \frac{\pi}{24}(1+\tilde{\alpha})^2g^3. \tag{409}
\end{aligned}$$

- $i = 1, j = 3$  :

$$\begin{aligned}
I_{13} &= -\frac{1+\tilde{\alpha}}{2}g^3 \int_0^{2\pi} d\tilde{\varphi} \int_0^{\pi/2} d\tilde{\theta} \sin \tilde{\theta} \cos^2 \tilde{\theta} \times \\
&\quad \left[ (1+\tilde{\alpha}) \cos \tilde{\theta} (\sin \tilde{\theta} \cos \tilde{\varphi} \cos \theta \cos \varphi - \sin \tilde{\theta} \sin \tilde{\varphi} \sin \varphi + \cos \tilde{\theta} \sin \theta \cos \varphi) \times \right. \\
&\quad \quad \quad \times (\cos \tilde{\theta} \cos \theta - \sin \tilde{\theta} \cos \tilde{\varphi} \sin \theta) \\
&\quad - (\underbrace{\sin \tilde{\theta} \cos \tilde{\varphi} \cos \theta \cos \varphi}_{\rightarrow 0} - \underbrace{\sin \tilde{\theta} \sin \tilde{\varphi} \sin \varphi}_{\rightarrow 0} + \cos \tilde{\theta} \sin \theta \cos \varphi) \cos \theta - (\cos \tilde{\theta} \cos \theta \\
&\quad \left. - \underbrace{\sin \tilde{\theta} \cos \tilde{\varphi} \sin \theta}_{\rightarrow 0}) \sin \theta \cos \varphi \right] \\
&= -\frac{1+\tilde{\alpha}}{2}g^3 \int_0^{2\pi} d\tilde{\varphi} \int_0^{\pi/2} d\tilde{\theta} \\
&\quad \left[ (1+\tilde{\alpha}) \left( \underbrace{-\sin^3 \tilde{\theta} \cos^3 \tilde{\theta} \cos^2 \tilde{\varphi} \cos \theta \cos \varphi \sin \theta}_{\rightarrow \pi/12} + \underbrace{\sin \tilde{\theta} \cos^5 \tilde{\theta} \sin \theta \cos \varphi \cos \theta}_{\rightarrow \pi/3} \right) \right. \\
&\quad \quad \quad \left. - \underbrace{\cos^3 \tilde{\theta} \sin \tilde{\theta} \sin \theta \cos \varphi \cos \theta}_{\rightarrow \pi/2} - \underbrace{\cos^3 \tilde{\theta} \sin \tilde{\theta} \cos \theta \sin \theta \cos \varphi}_{\rightarrow \pi/2} \right] \\
&= -\frac{1+\tilde{\alpha}}{2}g \left[ (1+\tilde{\alpha}) \left( -\frac{\pi}{12} \underbrace{\cos \theta \cos \varphi \sin \theta g^2}_{=g_1 g_3} + \frac{\pi}{3} \underbrace{\cos \varphi \cos \theta \sin \theta g^2}_{=g_1 g_3} \right) - \pi g_1 g_3 \right] \\
&= -\frac{\pi}{2}(1+\tilde{\alpha})g g_1 g_3 \left[ (1+\tilde{\alpha}) \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{12} \right) - 1 \right] \\
&= \frac{\pi}{8}(1+\tilde{\alpha})(3-\tilde{\alpha})g g_1 g_3. \tag{410}
\end{aligned}$$

- $i = 1, j = 2$  :

$$\begin{aligned}
I_{13} &= -\frac{1+\tilde{\alpha}}{2}g^3 \int_0^{2\pi} d\tilde{\varphi} \int_0^{\pi/2} d\tilde{\theta} \sin \tilde{\theta} \cos^2 \tilde{\theta} \times \\
&\quad \left[ (1+\tilde{\alpha}) \cos \tilde{\theta} (\sin \tilde{\theta} \cos \tilde{\varphi} \cos \theta \cos \varphi - \sin \tilde{\theta} \sin \tilde{\varphi} \sin \varphi + \cos \tilde{\theta} \sin \theta \cos \varphi) \times \right. \\
&\quad \quad \times (\sin \tilde{\theta} \cos \tilde{\varphi} \cos \theta \sin \varphi + \sin \tilde{\theta} \sin \tilde{\varphi} \cos \varphi + \cos \tilde{\theta} \sin \theta \sin \varphi) \\
&\quad - \underbrace{(\sin \tilde{\theta} \cos \tilde{\varphi} \cos \theta)}_{\rightarrow 0} - \underbrace{\sin \tilde{\theta} \sin \tilde{\varphi} \sin \varphi}_{\rightarrow 0} + \cos \tilde{\theta} \sin \theta \cos \varphi \sin \theta \sin \varphi \\
&\quad \left. - \underbrace{(\sin \tilde{\theta} \cos \tilde{\varphi} \cos \theta \sin \varphi)}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\sin \tilde{\theta} \sin \tilde{\varphi} \cos \varphi}_{\rightarrow 0} + \cos \tilde{\theta} \sin \theta \sin \varphi \sin \theta \cos \varphi \right] \\
&= -\frac{1+\tilde{\alpha}}{2}g \int_0^{2\pi} d\tilde{\varphi} \int_0^{\pi/2} d\tilde{\theta} \\
&\quad \left[ (1+\tilde{\alpha})g^2 \underbrace{(\sin^3 \tilde{\theta} \cos^3 \tilde{\theta} \cos^2 \tilde{\varphi} \cos^2 \theta \cos \varphi \sin \varphi)}_{\rightarrow \pi/12} - \underbrace{\sin^3 \tilde{\theta} \sin^2 \tilde{\varphi} \cos^3 \tilde{\theta} \sin \varphi \cos \varphi}_{\rightarrow \pi/12} \right. \\
&\quad \left. + \underbrace{\cos^5 \tilde{\theta} \sin \tilde{\theta} \sin^2 \theta \cos \varphi \sin \varphi}_{\rightarrow \pi/3} - 2 \underbrace{\sin \tilde{\theta} \cos^3 \tilde{\theta} \sin^2 \theta \cos \varphi \sin \varphi}_{\rightarrow \pi/2} \underbrace{\sin \varphi g^2}_{=g_1 g_2} \right] \\
&= -\frac{1+\tilde{\alpha}}{2}g\pi \left[ (1+\tilde{\alpha}) \underbrace{\left( \frac{1}{12}g^2 \underbrace{\cos^2 \theta}_{=1-\sin^2 \theta} \cos \varphi \sin \varphi - \frac{1}{12}g^2 \cos \varphi \sin \varphi \right)}_{=g^2 \cos \varphi \sin \varphi - g^2 \sin^2 \theta \cos \varphi \sin \varphi} \right. \\
&\quad \quad \quad \left. + \frac{1}{3} \underbrace{g^2 \sin^2 \theta \cos \varphi \sin \varphi}_{=g_1 g_2} \right] - g_1 g_2 \\
&= -\frac{1+\tilde{\alpha}}{2}g\pi \left[ \frac{1+\tilde{\alpha}}{3} \left( \frac{1}{4} \cos \varphi \sin \varphi - \frac{1}{4} g_1 g_2 - \frac{1}{4} \cos \varphi \sin \varphi + g_1 g_2 \right) - g_1 g_2 \right] \\
&= -\frac{1+\tilde{\alpha}}{2}g g_1 g_2 \pi \left[ (1+\tilde{\alpha}) \frac{3}{12} - \frac{12}{12} \right] \\
&= \frac{\pi}{8} (1+\tilde{\alpha})(3-\tilde{\alpha}) g g_1 g_2. \tag{411}
\end{aligned}$$

- $i = 1, j = 2$  et  $i = 2, j = 2$  : calculs similaires en tout point. ■

Avec ce lemme, l'Eq. (394) devient

$$\int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{v}_1 D_{ij}(\mathbf{v}_1) L_c[\mathcal{M}D_{ij}] = \frac{\pi}{8} (1+\tilde{\alpha})(3-\tilde{\alpha}) m \sigma^2 \int_{\mathbb{R}^{2 \times 3}} d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 f^{(0)}(\mathbf{V}_1) \mathcal{M}(\mathbf{V}_2) D_{ij}(\mathbf{V}_2) g g_i g_j. \tag{412}$$

Changement de variables :  $\mathbf{V}_1 \mapsto \mathbf{V}$ ,  $\mathbf{V}_2 \mapsto \mathbf{g} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{V}_2$ , donc  $J = 1$  et  $\mathbf{V}_2 = \mathbf{V} - \mathbf{g}$  et

$$\begin{aligned}
D_{ij}(\mathbf{V} - \mathbf{g}) &= m \left[ (\mathbf{V} - \mathbf{g})_i (\mathbf{V} - \mathbf{g})_j - \frac{1}{3} (\mathbf{V} - \mathbf{g})^2 \delta_{ij} \right] g_i g_j \\
&= m \left( \underbrace{V_i V_j g_i g_j}_{=(\mathbf{V} \cdot \mathbf{g})^2} - \underbrace{V_i g_j g_i g_j}_{=(\mathbf{V} \cdot \mathbf{g})g^2} - \underbrace{V_j g_i g_j g_i}_{=(\mathbf{V} \cdot \mathbf{g})g^2} + \underbrace{g_i g_j g_i g_j}_{=g^4} - \frac{1}{3} V^2 \underbrace{g_i g_j \delta_{ij}}_{=g^2} - \frac{1}{3} g^2 \underbrace{g_i g_j \delta_{ij}}_{=g^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{3} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{g}) \underbrace{g_i g_j \delta_{ij}}_{=g^2} \right) \\
&= m \left[ (\mathbf{V} \cdot \mathbf{g})^2 - \frac{4}{3} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{g})g^2 + \frac{2}{3}g^4 - \frac{1}{3}V^2g^2 \right], \tag{413}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{M}(\mathbf{V} - \mathbf{g}) = \frac{n}{v_T^3} \frac{1}{\pi^{3/2}} e^{-(\mathbf{V} - \mathbf{g})^2/v_T^2} = \frac{n}{v_T^3} \frac{1}{\pi^{3/2}} e^{-V^2/v_T^2} e^{-g^2/v_T^2} e^{2(\mathbf{V} \cdot \mathbf{g})/v_T^2}. \tag{414}$$

L'Eq. (412) devient alors en faisant le changement de variables  $\mathbf{u} = \mathbf{V}/v_T$  et  $\mathbf{g} \doteq \mathbf{g}/v_T$  :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{v}_1 D_{ij}(\mathbf{v}_1) L_c[\mathcal{M}D_{ij}] &= \frac{\pi}{8} [4 - (1 - \tilde{\alpha})^2] m \sigma^2 \frac{n}{v_T^3} \frac{1}{\pi^{3/2}} m \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{V} f^{(0)}(\mathbf{V}) e^{-V^2/v_T^2} \times \\
&\quad \times \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{g} e^{-g^2} e^{2(\mathbf{V} \cdot \mathbf{g})/v_T^2} g \left[ (\mathbf{V} \cdot \mathbf{g})^2 - \frac{4}{3} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{g})g^2 + \frac{2}{3}g^4 - \frac{1}{3}V^2g^2 \right] \\
&= \frac{\pi}{8} [4 - (1 - \tilde{\alpha})^2] m^2 \sigma^2 \frac{n}{\pi^{3/2}} v_T^3 \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{u} f^{(0)}(v_T|\mathbf{u}|) e^{-u^2} \times \\
&\quad \times \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{g} e^{-g^2} e^{2ug \cos \theta} g v_T^5 \left( u^2 g^2 \cos^2 \theta - \frac{4}{3} u g^3 \cos \theta + \frac{2}{3} g^4 - \frac{1}{3} u^2 g^2 \right) \\
&= \frac{\pi}{8} [4 - (1 - \tilde{\alpha})^2] m^2 \sigma^2 \frac{n}{\pi^{3/2}} v_T^8 \int_0^\infty dx f^{(0)}(v_T x) e^{-x^2} x^2 \underbrace{\int d\Omega}_{=4\pi} \times \\
&\quad \times \int_0^\infty dg g^3 e^{-g^2} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{=2\pi} \int_0^\pi d\theta \sin \theta e^{2gx \cos \theta} \left( x^2 g^2 \cos^2 \theta \right. \\
&\quad \quad \quad \left. - \frac{4}{3} x g^3 \cos \theta + \frac{2}{3} g^4 - \frac{1}{3} x^2 g^2 \right) \\
&\stackrel{y=\cos \theta}{=} \pi^3 [4 - (1 - \tilde{\alpha})^2] m^2 \sigma^2 \frac{n}{\pi^{3/2}} v_T^8 \int_0^\infty dx f^{(0)}(v_T x) e^{-x^2} x^2 \times \\
&\quad \times \int_0^\infty dg g^5 e^{-g^2} \underbrace{\int_{-1}^1 dy e^{2gxy} \left( x^2 + y^2 - \frac{4}{3} xgy + \frac{2}{3} g^4 - \frac{1}{3} x^2 \right)}_{\substack{= \frac{e^{2gx}}{12g^3x} (3+4g^2+4g^4-6gx-8g^3x+4g^2x) \\ + \frac{e^{-2gx}}{12g^3x} (-3-4g^2-4g^4-6gx-8g^3x-4g^2x)}} \\
&\quad \quad \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{= \frac{1}{x} [2x+2e^{x^2} \sqrt{\pi} (\frac{1}{2}+x^2) \text{Erf}(x)]} \\
&= 2\pi^3 [4 - (1 - \tilde{\alpha})^2] m^2 \sigma^2 \frac{n}{\pi^{3/2}} v_T^8 \int_0^\infty dx f^{(0)}(v_T x) x \left[ x e^{-x^2} \right. \\
&\quad \quad \quad \left. + \left( \frac{1}{2} + x^2 \right) \sqrt{\pi} \text{Erf}(x) \right], \tag{415}
\end{aligned}$$

où nous avons noté  $d\Omega$  l'élément d'angle solide et  $\text{Erf}(x) = (2/\sqrt{\pi}) \int_0^x dt e^{-t^2}$ . A titre de vérification, on peut montrer que le coefficient de transport issu de l'Eq. (415) est le même que celui de l'Eq. (B12)

dans [2]. Calculant explicitement l'intégrale dans l'Eq. (415) il vient

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{v}_1 D_{ij}(\mathbf{v}_1) L_c[\mathcal{M}D_{ij}] &= 2\pi^3 [4 - (1 - \tilde{\alpha})^2] m^2 \sigma^2 \frac{n}{\pi^{3/2}} v_T^8 \frac{n}{v_T^3} \frac{1}{\pi^{3/2}} \times \\
&\times \underbrace{\int_0^\infty dx e^{-x^2} [1 + a_2 S_2(x^2)] x \left[ x e^{-x^2} + \left(\frac{1}{2} + x^2\right) \sqrt{\pi} \operatorname{Erf}(x) \right]}_{=\sqrt{\frac{\pi}{2}}(1 - \frac{1}{32}a_2)} \\
&= [4 - (1 - \tilde{\alpha})^2] \sqrt{2\pi} m^2 n^2 \sigma^2 \left(\frac{2}{\beta m}\right)^{5/2} \left(1 - \frac{1}{32}a_2\right). \quad (416)
\end{aligned}$$

Le coefficient de transport est alors

$$\begin{aligned}
\nu_\eta^{*c} &= \frac{\beta^2}{10n\nu_0} 4 \left[1 - \frac{1}{4}(1 - \tilde{\alpha})^2\right] \left(1 - \frac{1}{64}2a_2\right) \sqrt{2\pi} m^2 n^2 \sigma^2 \left(\frac{2}{\beta m}\right)^{5/2} \\
&= \frac{\beta^2}{10n} 4 \sqrt{2\pi} m^2 n^2 \sigma^2 \left(\frac{2}{\beta m}\right)^{5/2} \frac{5}{16} \frac{1}{n\sigma^2} \sqrt{\frac{m}{\pi k_B T}} \left[1 - \frac{1}{4}(1 - \tilde{\alpha})^2\right] \left(1 - \frac{1}{64}2a_2\right) \\
&= \left[1 - \frac{1}{4}(1 - \tilde{\alpha})^2\right] \left(1 - \frac{1}{64}2a_2\right). \quad (417)
\end{aligned}$$

L'Eq. (417) est bien la même que l'Eq. (B13) de [2] (ou bien le cas particulier  $d = 3$  de la relation générale dans [14]). Nous supposons donc la relation en dimension arbitraire [14] correcte :

$$\nu_\eta^{*c} = \frac{(3 - 3\tilde{\alpha} + 2d)(1 + \tilde{\alpha})}{4d} \left(1 - \frac{1}{64}2a_2\right), \quad (418)$$

et nous particularisons au cas des sphères dures en posant  $\tilde{\alpha} = 1$  pour obtenir :

$$\boxed{\nu_\eta^{*c} = 1 - \frac{1}{64}2a_2.} \quad (419)$$

Il est remarquable que cette expression soit indépendante de la dimension  $d$ .

### 3.3.4.4 Calcul de $L_c$ avec $X = Y = S_i(\mathbf{V}) : \nu_\kappa^*, \nu_\mu^*$

Utilisant le lemme 3.4, il faut calculer

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v}_1 S_i(\mathbf{v}_1) L_c[\mathcal{M}S_i] &= -\sigma^{d-1} \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 f^{(0)}(\mathbf{v}_1) \mathcal{M}(\mathbf{v}_2) S_i(\mathbf{v}_2) \times \\
&\times \int d\hat{\boldsymbol{\sigma}} \theta(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{v}_{12}) (\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{v}_{12}) (b-1) [S_i(\mathbf{v}_1) + S_i(\mathbf{v}_2)]. \quad (420)
\end{aligned}$$

A nouveau, nous supposons l'expression finale en dimension arbitraire [14] correcte (attention : cette expression se trouve en comparant les Eqs. (235) avec les Eqs. (11) à (13) de [14], car la définition de  $\nu_\mu^*$  et  $\nu_\kappa^*$  en dimension arbitraire diffère de ma définition) :

$$\nu_\mu^{*c} = \nu_\kappa^{*c} = \frac{d-1}{d} \frac{1+\tilde{\alpha}}{d-1} \left[ \frac{d-1}{2} + \frac{3(d+8)(1-\tilde{\alpha})}{16} + \frac{4+5d-3(4-d)\tilde{\alpha}}{2048} 2a_2 \right], \quad (421)$$

et nous ramenons au cas des sphères dures en posant  $\tilde{\alpha} = 1$  pour obtenir :

$$\boxed{\nu_\mu^{*c} = \nu_\kappa^{*c} = \frac{d-1}{d} \left(1 + \frac{1}{64}2a_2\right).} \quad (422)$$

### 3.3.4.5 Calcul de la seconde intégrale pour $\nu_\kappa^*$ et $\nu_\mu^*$

Calculons la seconde intégrale apparaissant dans la définition (286) de  $\nu_\kappa^*$  et  $\nu_\mu^*$ . Notons cette contribution  $\nu_\kappa^{*a'} = \nu_\mu^{*a'}$  (on n'inclut pas la probabilité d'annihilation  $p$  dans la définition de ces contributions) :

$$\nu_\kappa^{*a'} = \nu_\mu^{*a'} = \frac{2m\beta^3}{d(d+2)n\nu_0} \left( - \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V}) \Omega[\mathcal{M}S_i] \right), \quad (423)$$

avec

$$\begin{aligned} \Omega[\mathcal{M}S_i] &\stackrel{(147)}{=} f^{(0)} \xi_n^{(1)}[f^{(0)}, \mathcal{M}S_i] - \frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i} v_T \xi_{u_i}^{(1)}[f^{(0)}, \mathcal{M}S_i] + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T} T \xi_T^{(1)}[f^{(0)}, \mathcal{M}S_i] \\ &= f^{(0)} \frac{2}{n} \omega[f^{(0)}, \mathcal{M}S_i] - \frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_j} v_T \frac{1}{nv_T} \left( \omega[f^{(0)}, V_j \mathcal{M}S_i] + \omega[V_j f^{(0)}, \mathcal{M}S_i] \right) \\ &\quad + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T} T \left( - \frac{2}{n} \omega[f^{(0)}, \mathcal{M}S_i] \right. \\ &\quad \left. + \frac{m}{nk_B T d} \omega[f^{(0)}, V^2 \mathcal{M}S_i] + \frac{m}{nk_B T d} \omega[V^2 f^{(0)}, \mathcal{M}S_i] \right), \quad (424) \end{aligned}$$

où on a utilisé les définitions (121) à (123) des taux de déclin au premier ordre. La fonction

$$S_i(\mathbf{V}) = \left( \frac{m}{2} V^2 - \frac{d+2}{2} k_B T \right) V_i \quad (425)$$

étant impaire dans les vitesses, alors seuls les termes issus de  $\xi_{u_i}^{(1)}$  sont non nuls et donc

$$\Omega[\mathcal{M}S_i] = - \frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_j} v_T \frac{1}{nv_T} \underbrace{\left( \omega[f^{(0)}, V_j \mathcal{M}S_i] + \omega[V_j f^{(0)}, \mathcal{M}S_i] \right)}_{\doteq K_{ij}}. \quad (426)$$

Le terme  $K_{ij}$  est bien indépendant des vitesses car l'opérateur  $\omega$  a comme action une intégration sur ces variables, donc l'Eq. (426) dans (423) fournit

$$\begin{aligned} \nu_\kappa^{*a'} = \nu_\mu^{*a'} &= \frac{2m\beta^3}{d(d+2)n\nu_0} K_{ij} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V}) \frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_j}}_{= - \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} f^{(0)} \frac{\partial S_i}{\partial V_j} + f^{(0)}(\mathbf{V}) S_i(\mathbf{V}) \Big|_{\text{bord}}}_{=0} \\ &= - \frac{2m\beta^3}{d(d+2)n\nu_0} K_{ij} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} f^{(0)} \frac{\partial S_i}{\partial V_j}. \quad (427) \end{aligned}$$

Commençons par le calcul de l'intégrand, ensuite de  $K_{ij}$ . L'Eq. (243) donne

$$f^{(0)}(V) = \frac{n}{v_T^d} \frac{1}{\pi^{d/2}} e^{-V^2/v_T^2} \left[ 1 + a_2 \left\{ \frac{1}{2} \frac{V^4}{v_T^4} - \frac{d+2}{2} \frac{V^2}{v_T^2} + \frac{d(d+2)}{8} \right\} \right], \quad (428)$$

tandis que de (223) il vient

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_i(\mathbf{V})}{\partial V_j} &= \delta_{ij} \left( \frac{m}{2} V^2 - \frac{d+2}{2} k_B T \right) + m V_i V_j, \quad k_B T = \frac{m}{2} v_T^2 \\ &= \frac{m}{2} \left[ 2V_i V_j + \left( V^2 - \frac{d+2}{2} v_T^2 \right) \delta_{ij} \right]. \quad (429) \end{aligned}$$

Les Eqs. (428) et (429) dans (427) donnent

$$\begin{aligned}
\nu_{\kappa}^{*a'} = \nu_{\mu}^{*a'} &= -\frac{2m\beta^3}{d(d+2)n\nu_0} K_{ij} \frac{n}{v_T^d} \frac{1}{\pi^{d/2}} \frac{m}{2} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} e^{-V^2/v_T^2} \\
&\quad \left[ 1 + a_2 \left\{ \frac{1}{2} \frac{V^4}{v_T^4} - \frac{d+2}{2} \frac{V^2}{v_T^2} + \frac{d(d+2)}{8} \right\} \right] \left[ 2V_i V_j + \left( V^2 - \frac{d+2}{2} v_T^2 \right) \delta_{ij} \right] \\
\stackrel{\mathbf{c}=\mathbf{V}/v_T}{=} &-p K_{ij} \frac{2m\beta^2 v_T^2}{d(d+2)\nu_0 \pi^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-c^2} \\
&\quad \left[ 1 + a_2 \left\{ \frac{1}{2} c^4 - \frac{d+2}{2} c^2 + \frac{d(d+2)}{8} \right\} \right] \left[ 2c_i c_j + \left( c^2 - \frac{d+2}{2} \right) \delta_{ij} \right] \\
&= -K_{ij} \frac{2m\beta^2 v_T^2}{d(d+2)\nu_0 \pi^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{c} e^{-c^2} \left[ 2c_i c_j + c^2 \delta_{ij} - \frac{d+2}{2} \delta_{ij} + a_2 c^4 c_i c_j \right. \\
&\quad + a_2 \frac{1}{2} c^6 \delta_{ij} - a_2 c^4 \frac{d+2}{4} \delta_{ij} - a_2 \frac{d+2}{2} 2c^2 c_i c_j - a_2 \frac{d+2}{2} c^4 \delta_{ij} \\
&\quad + a_2 \left( \frac{d+2}{2} \right)^2 c^2 \delta_{ij} + a_2 \frac{d(d+2)}{8} 2c_i c_j + a_2 \frac{d(d+2)}{8} c^2 \delta_{ij} \\
&\quad \left. - a_2 \frac{d(d+2)}{8} \frac{d+2}{2} \delta_{ij} \right] \\
&= -K_{ij} \frac{2m\beta^2 v_T^2}{d(d+2)\nu_0 \pi^{d/2}} \left[ M_{ij}^1[0] \left( 2 + \frac{d(d+2)}{4} a_2 \right) + I^1[2] \delta_{ij} \left( 1 + \frac{(d+2)(3d+4)}{8} a_2 \right) \right. \\
&\quad - I^1[0] \delta_{ij} \frac{d+2}{2} \left( 1 + \frac{d(d+2)}{8} a_2 \right) + a_2 M_{ij}^1[4] + \frac{1}{2} a_2 I^1[6] \delta_{ij} \\
&\quad \left. - I^1[4] \delta_{ij} a_2 \frac{d+2}{4} 3 - M_{ij}^1[2] a_2 (d+2) \right], \tag{430}
\end{aligned}$$

où on a utilisé

$$I^a[n] = \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{x} |\mathbf{x}|^n e^{-a x^2} = \frac{\pi^{d/2}}{a^{(d+n)/2}} \frac{\Gamma\left(\frac{d+n}{2}\right)}{\Gamma(d/2)}, \tag{431}$$

$$M_{ij}^a[n] = \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{x} |\mathbf{x}|^n e^{-a x^2} x_i x_j = \delta_{ij} \pi^{(d-1)/2} 2^{d-3} \frac{d+n}{d} \frac{\Gamma\left(\frac{d+n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)}{\Gamma(d-1)} \frac{1}{a^{(d+n+2)/2}}. \tag{432}$$

En particulier

$$I^1[0] = \pi^{d/2}, \tag{433}$$

$$I^1[2] = \pi^{d/2} \frac{d}{2}, \tag{434}$$

$$I^1[4] = \pi^{d/2} \frac{d+2}{2} \frac{d}{2}, \tag{435}$$

$$I^1[6] = \pi^{d/2} \frac{d+4}{2} \frac{d+2}{2} \frac{d}{2}, \tag{436}$$

$$M_{ij}^1[0] = \delta_{ij} \pi^{(d-1)/2} 2^{d-3} \frac{\Gamma(d/2) \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)}{\Gamma(d-1)} = \delta_{ij} \frac{1}{2} \pi^{d/2}, \tag{437}$$

$$M_{ij}^1[2] = \delta_{ij} \frac{d+2}{4} \pi^{d/2}, \tag{438}$$

$$M_{ij}^1[4] = \delta_{ij} \frac{(d+2)(d+4)}{8} \pi^{d/2}. \tag{439}$$

Les relations (433) à (439) dans (430) donnent

$$\begin{aligned}\nu_{\kappa}^{*a'} = \nu_{\mu}^{*a'} &= -K_{ij} \frac{2m\beta^2 v_T^2}{d(d+2)\nu_0} \delta_{ij} a_2 \frac{d+2}{16} \times \\ &\quad \times [2d + 3d^2 + 4d - 4d^2 - 8d + 2d + 8 + d^2 + 4d - 4d - 8] \\ &= 0.\end{aligned}\tag{440}$$

Ainsi

$$\boxed{\nu_{\kappa}^{*a'} = \nu_{\mu}^{*a'} = 0.}\tag{441}$$

### 3.3.4.6 Calcul de la seconde intégrale pour $\nu_{\eta}^*$

Calculons la seconde intégrale apparaissant dans la définition (286) de  $\nu_{\eta}^*$ . Notons cette contribution  $\nu_{\eta}^{*a'}$  :

$$\nu_{\eta}^{*a'} = - \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} D_{ij}(\mathbf{V}) \Omega[\mathcal{M}D_{ij}],\tag{442}$$

Nous allons montrer que cette contribution est nulle, c'est-à-dire que  $\Omega\mathcal{C}_{ij} = 0$ .

$\Omega$  étant un opérateur linéaire intégral agissant sur les vitesses  $\mathbf{V}$ , on a par définition (60) de  $f^{(1)}$

$$\Omega f^{(1)} = (\Omega\mathcal{A}_i) \nabla_i \ln T + (\Omega\mathcal{B}_i) \nabla_i \ln n + (\Omega\mathcal{C}_{ij}) \nabla_j u_i.\tag{443}$$

En constatant que  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  ont les mêmes propriétés de symétrie que  $\mathbf{S}(\mathbf{V})$  (cf. Eqs. (272) et (273)) – c'est-à-dire que ces fonctions sont impaires en les vitesses – et que  $\mathcal{C}$  a les mêmes propriétés de symétrie que  $\mathbf{D}(\mathbf{V})$  (cf. Eq. (274)) – c'est-à-dire que cette fonction est paire en les vitesses – alors utilisant la définition (116) de l'opérateur  $\Omega$  il vient

$$\begin{aligned}\Omega\mathcal{A}_j &= f^{(0)} \xi_n^{(1)}[f^{(0)}, \mathcal{A}_j] - \frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i} v_T \xi_{u_i}^{(1)}[f^{(0)}, \mathcal{A}_j] + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T} T \xi_T^{(1)}[f^{(0)}, \mathcal{A}_j] \\ &= f^{(0)} \frac{2}{n} \underbrace{\omega[f^{(0)}, \mathcal{A}_j]}_{=0} - \frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i} v_T \frac{1}{nv_T} \left( \omega[f^{(0)}, V_i \mathcal{A}_j] + \omega[V_i f^{(0)}, \mathcal{A}_j] \right) \\ &\quad + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T} T \left( - \frac{2}{n} \underbrace{\omega[f^{(0)}, \mathcal{A}_j]}_{=0} + \frac{m}{nk_B T d} \underbrace{\omega[f^{(0)}, V^2 \mathcal{A}_j]}_{=0} + \frac{m}{nk_B T d} \underbrace{\omega[V^2 f^{(0)}, \mathcal{A}_j]}_{=0} \right) \\ &= - \frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i} v_T \frac{1}{nv_T} \left( \omega[f^{(0)}, V_i \mathcal{A}_j] + \omega[V_i f^{(0)}, \mathcal{A}_j] \right).\end{aligned}\tag{444}$$

Pour les mêmes raisons de symétries :

$$\Omega\mathcal{B}_j = - \frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i} v_T \frac{1}{nv_T} \left( \omega[f^{(0)}, V_i \mathcal{B}_j] + \omega[V_i f^{(0)}, \mathcal{B}_j] \right).\tag{445}$$

Et finalement

$$\begin{aligned}\Omega\mathcal{C}_{ij} &= f^{(0)} \frac{2}{n} \omega[f^{(0)}, \mathcal{C}_{ij}] - \frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i} v_T \frac{1}{nv_T} \left( \underbrace{\omega[f^{(0)}, V_i \mathcal{C}_{ij}]}_{=0} + \underbrace{\omega[V_i f^{(0)}, \mathcal{C}_{ij}]}_{=0} \right) \\ &\quad + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T} T \left( - \frac{2}{n} \omega[f^{(0)}, \mathcal{C}_{ij}] + \frac{m}{nk_B T d} \omega[f^{(0)}, V^2 \mathcal{C}_{ij}] + \frac{m}{nk_B T d} \omega[V^2 f^{(0)}, \mathcal{C}_{ij}] \right) \\ &= f^{(0)} \frac{2}{n} \omega[f^{(0)}, \mathcal{C}_{ij}] \\ &\quad + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T} T \left( - \frac{2}{n} \omega[f^{(0)}, \mathcal{C}_{ij}] + \frac{m}{nk_B T d} \omega[f^{(0)}, V^2 \mathcal{C}_{ij}] + \frac{m}{nk_B T d} \omega[V^2 f^{(0)}, \mathcal{C}_{ij}] \right).\end{aligned}\tag{446}$$

Insérant les relations (444) à (446) dans (443) il vient

$$\begin{aligned}
\Omega f^{(1)} &= -\frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i} v_T \frac{1}{nv_T} \left( \omega[f^{(0)}, V_i(\mathcal{A}_j \nabla_j \ln T + \mathcal{B}_j \nabla_j \ln n)] + \omega[V_i f^{(0)}, (\mathcal{A}_j \nabla_j \ln T + \mathcal{B}_j \nabla_j \ln n)] \right) \\
&\quad + f^{(0)} \frac{2}{n} \omega[f^{(0)}, \mathcal{C}_{ij}] \nabla_j u_i \\
&\quad + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T} T \left( -\frac{2}{n} \omega[f^{(0)}, \mathcal{C}_{ij}] + \frac{m}{nk_B T d} \omega[f^{(0)}, V^2 \mathcal{C}_{ij}] + \frac{m}{nk_B T d} \omega[V^2 f^{(0)}, \mathcal{C}_{ij}] \right) \nabla_j u_i \\
&= -\frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i} v_T \frac{1}{nv_T} \left( \omega[f^{(0)}, V_i \underbrace{(\mathcal{A}_j \nabla_j \ln T + \mathcal{B}_j \nabla_j \ln n + \mathcal{C}_{ij} \nabla_j u_i)}_{=f^{(1)}}] \right. \\
&\quad \left. + \omega[V_i f^{(0)}, \underbrace{(\mathcal{A}_j \nabla_j \ln T + \mathcal{B}_j \nabla_j \ln n + \mathcal{C}_{ij} \nabla_j u_i)}_{=f^{(1)}}] \right) \\
&\quad + f^{(0)} \frac{2}{n} \omega[f^{(0)}, \mathcal{C}_{ij}] \nabla_j u_i \\
&\quad + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T} T \left( -\frac{2}{n} \omega[f^{(0)}, \mathcal{C}_{ij}] + \frac{m}{nk_B T d} \omega[f^{(0)}, V^2 \mathcal{C}_{ij}] + \frac{m}{nk_B T d} \omega[V^2 f^{(0)}, \mathcal{C}_{ij}] \right) \nabla_j u_i \\
&\stackrel{(65)}{=} -\frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i} v_T \xi_{u_i}^{(1)} \\
&\quad + f^{(0)} \frac{2}{n} \omega[f^{(0)}, \mathcal{C}_{ij}] \nabla_j u_i \\
&\quad + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T} T \left( -\frac{2}{n} \omega[f^{(0)}, \mathcal{C}_{ij}] + \frac{m}{nk_B T d} \omega[f^{(0)}, V^2 \mathcal{C}_{ij}] + \frac{m}{nk_B T d} \omega[V^2 f^{(0)}, \mathcal{C}_{ij}] \right) \nabla_j u_i. \quad (447)
\end{aligned}$$

D'un autre côté, on refait ce calcul en appliquant la définition de  $\Omega$

$$\Omega f^{(1)} = f^{(0)} \xi_n^{(1)} - \frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i} v_T \xi_{u_i}^{(1)} + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T} T \xi_T^{(1)}. \quad (448)$$

Or, on trouve par calcul explicite que les taux de déclin au premier ordre  $\xi_n^{(1)}$  et  $\xi_T^{(1)}$  sont nuls (cf. Sect 3.6.3). Notons que la discussion actuelle concerne les coefficients de transports, qui naturellement entrent dans les expressions des taux de déclin. Néanmoins, le fait que  $\Omega \mathcal{C}_{ij}$  soit nul ou pas n'affecte en rien la validité du résultat  $\xi_n^{(1)} = \xi_T^{(1)} = 0$ . En effet, les coefficients de transports apparaissent de façon non développée dans les taux de déclin, comme coefficients non déterminés explicitement. On peut par conséquent utiliser le résultat  $\xi_n^{(1)} = \xi_T^{(1)} = 0$  démontré ultérieurement, sans créer la moindre ambiguïté sur la généralité des conclusions tirées ici. Ainsi

$$\Omega f^{(1)} = -\frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i} v_T \xi_{u_i}^{(1)}. \quad (449)$$

Comparant les Eqs. (447) et (449) on en conclut que la somme des deux derniers termes de (447) est nulle. Or ces deux derniers termes sont issus de la contribution de  $\Omega \mathcal{C}_{ij} \nabla_i u_j$ . Il reste à vérifier que  $\Omega \mathcal{C}_{ij} \nabla_i u_j = 0$  implique  $\Omega \mathcal{C}_{ij} = 0$ . Pour cela, par isotropie il faut que

$$(\Omega \mathcal{C}_{ij}) = a \delta_{ij} + b(1 - \delta_{ij}), \quad a, b \in \mathbb{R}. \quad (450)$$

Alors

$$\begin{aligned}
(\Omega \mathcal{C}_{ij}) \nabla_i u_j &= a \delta_{ij} \nabla_j u_i + b(1 - \delta_{ij}) \nabla_j u_i \\
&= a \nabla_j u_j + \frac{d(d-1)}{2} b \nabla_k u_l, \quad k, l \in \{1, \dots, d\} \\
&= 0. \quad (451)
\end{aligned}$$

Mais aussi, les propriétés de symétrie de  $\mathcal{C}_{ij}$  étant les mêmes que celles de  $D_{ij}$ , alors en particulier  $\text{Tr } \mathcal{C} = \text{Tr } \mathbf{D} = 0$ . Ainsi comme  $\Omega$  est un opérateur linéaire on a

$$\text{Tr}(\Omega \mathcal{C}) = \Omega(\text{Tr } \mathcal{C}) = 0, \quad (452)$$

et

$$\text{Tr}(\Omega \mathcal{C}) \stackrel{(450)}{=} da. \quad (453)$$

Comparant (453) et (452) il vient

$$a = 0, \quad (454)$$

que l'on insère dans l'Eq. (451) pour obtenir

$$\frac{d(d-1)}{2} b \nabla_k u_l = 0, \quad \forall k, l \in \{1, \dots, d\}, \quad k \neq l, \quad (455)$$

d'où

$$b = 0. \quad (456)$$

En conclusion, les Eqs. (454) et (456) dans (450) donnent

$$(\Omega \mathcal{C}_{ij}) = 0. \quad (457)$$

Revenant à (442) en sachant qu'au premier ordre  $\mathcal{C}_{ij} = c_0 \mathcal{M} D_{ij}$ , il vient

$$\boxed{\nu_\eta^{*a'} = 0.} \quad (458)$$

### 3.3.4.7 Coefficients de transport

Nous avons trouvé

$$\begin{aligned} \nu_\eta^* &\stackrel{(286)}{=} \frac{\beta^2}{(d+2)(d-1)n\nu_0} \left[ \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} D_{ij}(\mathbf{V}) J[\mathcal{M} D_{ij}] - p \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} D_{ij}(\mathbf{V}) \Omega[\mathcal{M} D_{ij}] \right] \\ &\stackrel{(287)}{=} p \frac{\beta^2}{(d+2)(d-1)n\nu_0} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} D_{ij}(\mathbf{V}) L_a[\mathcal{M} D_{ij}] \\ &\quad + (1-p) \frac{\beta^2}{(d+2)(d-1)n\nu_0} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} D_{ij}(\mathbf{V}) L_c[\mathcal{M} D_{ij}] \\ &\quad - p \frac{\beta^2}{(d+2)(d-1)n\nu_0} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} D_{ij}(\mathbf{V}) \Omega[\mathcal{M} D_{ij}] \\ &= p \nu_\eta^{*a} + (1-p) \nu_\eta^{*c} + p \nu_\eta^{*a'} \\ &= p \left[ \frac{12 + 18d + 5d^2}{8d} + a_2 \frac{1}{256d(d-1)} \left( 139 + 123d - 8d^2 + 58d^3 + 60d^4 + 12d^5 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 9\pi 2^{5-d} \frac{d(d+1)(d+3)}{d+2} \right) \right] \\ &\quad + (1-p) \left[ 1 - \frac{1}{64} 2a_2 \right], \end{aligned} \quad (459)$$

$$\begin{aligned} \nu_\mu^* = \nu_\kappa^* &= p \nu_\mu^{*a} + (1-p) \nu_\mu^{*c} + p \nu_\mu^{*a'} \\ &= p \left[ \frac{16 + 27d + 8d^2}{32d} - a_2 \frac{-2880 - 1544d + 2658d^2 + 1539d^3 + 200d^4}{32d(d+2)} \right] \\ &\quad + (1-p) \frac{d-1}{d} \left[ 1 + \frac{1}{64} 2a_2 \right] + p a_2 \frac{d+2}{16}. \end{aligned} \quad (460)$$

### 3.3.5 La distribution $f^{(1)}$

De l'Eq. (60) :

$$f^{(1)}(\mathbf{V}) = \mathcal{A}_i(\mathbf{V})\nabla_i \ln T + \mathcal{B}_i(\mathbf{V})\nabla_i \ln n + \mathcal{C}_{ij}(\mathbf{V})\nabla_j u_i, \quad (461)$$

et des développements de Sonine (272) à (274) il vient

$$f^{(1)}(\mathbf{V}) = \mathcal{M}(\mathbf{V}) [a_1 S_i(\mathbf{V})\nabla_i \ln T + b_1 S_i(\mathbf{V})\nabla_i \ln n + c_0 D_{ij}(\mathbf{V})\nabla_j u_i], \quad (462)$$

où

$$\mathcal{M}(\mathbf{V}) = \frac{n}{v_T^d} \mathcal{M}(c). \quad (463)$$

On peut déterminer les coefficients  $a_1$ ,  $b_1$ , et  $c_0$  en fonction des coefficients de transport  $\eta$ ,  $\kappa$ , et  $\mu$  donnés par les relations (163), (191), et (192) respectivement. Ainsi :

$$\begin{aligned} \eta &\stackrel{(163)}{=} -\frac{1}{(d-1)(d+2)} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} D_{ij}(\mathbf{V}) \mathcal{C}_{ij}(\mathbf{V}) \\ &\stackrel{(274)}{=} -\frac{1}{(d-1)(d+2)} c_0 \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} D_{ij}(\mathbf{V}) \mathcal{M}(\mathbf{V}) D_{ij}(\mathbf{V}) \\ &\stackrel{(285)}{=} -c_0 \frac{1}{(d-1)(d+2)} \frac{(d+2)(d-1)}{\beta^2} n \\ &= -c_0 \frac{n}{\beta^2}, \end{aligned} \quad (464)$$

$$\begin{aligned} \kappa &\stackrel{(191)}{=} -\frac{1}{dT} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V}) \mathcal{A}_i(\mathbf{V}) \\ &\stackrel{(272)}{=} -a_1 \frac{1}{dT} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V}) \mathcal{M}(\mathbf{V}) S_i(\mathbf{V}) \\ &\stackrel{(283)}{=} -a_1 \frac{1}{dT} \frac{d(d+2)}{2} \frac{n}{m\beta^3} \\ &= -a_1 \frac{d+2}{2} \frac{nk_B}{m\beta^2}, \end{aligned} \quad (465)$$

$$\begin{aligned} \mu &\stackrel{(192)}{=} -\frac{1}{dn} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V}) \mathcal{B}_i(\mathbf{V}) \\ &\stackrel{(273)}{=} -b_1 \frac{1}{dn} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V} S_i(\mathbf{V}) \mathcal{M}(\mathbf{V}) S_i(\mathbf{V}) \\ &\stackrel{(283)}{=} -b_1 \frac{1}{dn} \frac{d(d+2)}{2} \frac{n}{m\beta^3} \\ &= -b_1 \frac{d+2}{2} \frac{1}{m\beta^3}. \end{aligned} \quad (466)$$

On vérifie bien que les relations (464) à (466) dans le cas particulier  $d = 3$  redonnent celles dans [2]. On en tire donc :

$$c_0 = -\frac{\beta^2}{n} \eta, \quad (467)$$

$$a_1 = -\frac{2}{d+2} \frac{m\beta^2}{nk_B} \kappa, \quad (468)$$

$$b_1 = -\frac{2}{d+2} m\beta^3 \mu. \quad (469)$$

Les relations (467) à (469) dans l'Eq. (462) fournissent finalement

$$f^{(1)}(\mathbf{V}) = -\mathcal{M}(\mathbf{V}) \left[ \frac{2}{d+2} \frac{m\beta^2}{nk_B} \kappa \frac{1}{T} S_i(\mathbf{V}) \nabla_i T + \frac{2}{d+2} m\beta^3 \mu \frac{1}{n} S_i(\mathbf{V}) \nabla_i n + \frac{\beta^2}{n} \eta D_{ij}(\mathbf{V}) \nabla_j u_i \right], \quad (470)$$

d'où

$$\boxed{f^{(1)}(\mathbf{V}) = -\frac{\beta^3}{n} \mathcal{M}(\mathbf{V}) \left[ \frac{2m}{d+2} S_i(\mathbf{V}) (\kappa \nabla_i T + \mu \nabla_i n) + \frac{\eta}{\beta} D_{ij}(\mathbf{V}) \nabla_j u_i \right]}. \quad (471)$$

On vérifie que les unités de  $f^{(1)}(\mathbf{V})$  sont bien données par celles de  $\mathcal{M}(\mathbf{V})$  uniquement.

### 3.4 Ordre deux

Comme le tenseur de pression  $P_{ij}$  défini par l'Eq. (156)

$$P_{ij}(\mathbf{r}, t) = p\delta_{ij} - \eta \left( \nabla_i u_j + \nabla_j u_i - \frac{2}{d} \delta_{ij} \nabla_k u_k \right) - \zeta \delta_{ij} \nabla_k u_k, \quad (472)$$

et le courant de chaleur  $q_i$  défini par l'Eq. (155)

$$q_i(\mathbf{r}, t) = -\kappa \nabla_i T(\mathbf{r}, t) - \mu \nabla_i n(\mathbf{r}, t), \quad (473)$$

sont des grandeurs d'ordre 1 dans les gradients, alors leur insertion dans les équations de bilan (39) engendre des contributions d'ordre deux dans les gradients. Ainsi il existe des termes d'ordre deux (Burnett) qui contribuent à l'ordre Navier-Stokes, et la connaissance de  $f^{(2)}$  s'avère nécessaire [2]. En effet, les coefficients de transport obtenus précédemment ne sont valables qu'à l'ordre Navier-Stokes : on a utilisé  $P_{ij} = p^{(0)} \delta_{ij}$  et  $q_i = 0$  pour obtenir l'équation de bilan d'énergie (67). Néanmoins, il a été montré dans le contexte du gaz faiblement inélastique que ces contributions étaient négligeables devant celles d'ordre 1 [2]. Dans la limite élastique qui nous intéresse, elles sont environ  $10^4$  fois plus faibles que l'ordre linéaire.

Nous allons donc par souci de simplicité négliger ces contributions. Ainsi, lorsque la probabilité d'annihilation  $p$  est proche de zéro, cette approximation devrait être bien justifiée. Par contre, pour  $p \lesssim 1$  l'annihilation domine et nous ne savons pas a priori si ces termes d'ordre deux sont négligeables. Nous supposons néanmoins que tel est le cas en bonne approximation.

### 3.5 Résumé

Les Eqs. (235) donnent les coefficients  $\eta^*$ ,  $\kappa^*$ , et  $\mu^*$  de façon implicite. Il faut résoudre le système (sans difficulté technique). Résumons ce qui a été obtenu :

$$\begin{aligned}
P_{ij} &= p^{(0)}\delta_{ij} - \eta \left( \nabla_i u_j + \nabla_j u_i - \frac{2}{d}\delta_{ij}\nabla_k u_k \right), & p^{(0)} &= nk_B T, \\
q_i &= -\kappa \nabla_i T - \mu \nabla_i n, \\
\eta^* &= \frac{\eta}{\eta_0} = \frac{1}{\nu_\eta^* - \frac{1}{2}p\xi_T^{(0)*}}, \\
\kappa^* &= \frac{\kappa}{\kappa_0} = \frac{1}{\nu_\kappa^* - 2p\xi_T^{(0)*}} \left[ \frac{1}{2}p\xi_n^{(0)*}\mu^* + \frac{d-1}{d}(2a_2 + 1) \right], \\
\mu^* &= \frac{n\mu}{T\kappa_0} = \frac{2}{2\nu_\mu^* - 3p\xi_T^{(0)*} - 2p\xi_n^{(0)*}} \left[ p\xi_T^{(0)*}\kappa^* + \frac{d-1}{2d}2a_2 \right], \\
\nu_\kappa^* &= \nu_\mu^* = p \left[ \frac{16 + 27d + 8d^2}{32d} - a_2 \frac{-2880 - 1544d + 2658d^2 + 1539d^3 + 200d^4}{32d(d+2)} \right] \\
&\quad + (1-p) \frac{d-1}{d} \left[ 1 + \frac{1}{64}2a_2 \right], \\
\nu_\eta^* &= p \left[ \frac{3 + 6d + 2d^2}{8d} - a_2 \frac{278 + 375d - 96d^2 - 2d^3}{256d(d+2)} \right] + (1-p) \left[ 1 - \frac{1}{64}2a_2 \right], \\
\xi_n^{(0)*} &= \frac{\xi_n^{(0)}}{\nu_0} = \frac{d+2}{4} \left( 1 - \frac{1}{32}2a_2 \right), \\
\xi_T^{(0)*} &= \frac{\xi_T^{(0)}}{\nu_0} = \frac{d+2}{8d} \left( 1 + \frac{8d+11}{32}2a_2 \right), \\
\kappa_0 &= \frac{d(d+2)}{2(d-1)} \frac{k_B}{m} \eta_0, & \eta_0 &= \frac{p^{(0)}}{\nu_0}, & p^{(0)} &= nk_B T, \\
\eta_0 &= \frac{d+2}{8} \frac{\Gamma(d/2)}{\pi^{(d-1)/2}} \frac{\sqrt{mk_B T}}{\sigma^{d-1}}.
\end{aligned} \tag{474}$$

Les équations de bilan (39) sont (en tenant compte des Eqs. (54) à (56) ainsi que (63), (65), et (67)) :

$$\begin{aligned}
\partial_t n + \nabla_i (n u_i) &= -pn[\xi_n^{(0)} + \xi_n^{(1)}], \\
\partial_t u_i + \frac{k_B}{mn} \nabla_j P_{ij} + u_j \nabla_j u_i &= -pv_T[\xi_{u_i}^{(0)} + \xi_{u_i}^{(1)}], \\
\partial_t T + u_i \nabla_i T + \frac{2}{nk_B T} (P_{ij} \nabla_i u_j + \nabla_j q_i) &= -pT[\xi_T^{(0)} + \xi_T^{(1)}],
\end{aligned} \tag{475}$$

où  $\xi_{u_i}^{(0)} = 0$  par l'Eq. (138). Les taux de déclin à l'ordre 1 sont :

$$\xi_n^{(1)} \stackrel{(121)}{=} \frac{2}{n} \omega[f^{(0)}, f^{(1)}], \quad (476)$$

$$\xi_{u_i}^{(1)} \stackrel{(122)}{=} \frac{1}{nv_T} \omega[f^{(0)}, V_i f^{(1)}] + \frac{1}{nv_T} \omega[V_i f^{(0)}, f^{(1)}], \quad (477)$$

$$\xi_T^{(1)} \stackrel{(123)}{=} -\frac{2}{n} \omega[f^{(0)}, f^{(1)}] + \frac{m}{nkTd} \omega[f^{(0)}, V^2 f^{(1)}] + \frac{m}{nkTd} \omega[V^2 f^{(0)}, f^{(1)}], \quad (478)$$

où on a redéfini  $\xi_{u_i} \doteq \xi_{u_i}/v_T$  pour avoir les dimensions d'un taux, et

$$\omega[f, g] = \sigma^{d-1} \beta_1 \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 |\mathbf{v}_{12}| g(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1; t) f(\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2; t), \quad (479)$$

$$f^{(0)}(\mathbf{V}) = \mathcal{M}(\mathbf{V}) [1 + a_2 S_2(c^2)], \quad \mathcal{M}(\mathbf{V}) = \frac{n}{v_T^d} \mathcal{M}(c) = \frac{n}{v_T^d} \frac{1}{\pi^{d/2}} e^{-c^2}, \quad \mathbf{c} = \frac{\mathbf{V}}{v_T}, \quad (480)$$

$$f^{(1)}(\mathbf{V}) = -\frac{\beta^3}{n} \mathcal{M}(\mathbf{V}) \left[ \frac{2m}{d+2} S_i(\mathbf{V}) (\kappa \nabla_i T + \mu \nabla_i n) + \frac{\eta}{\beta} D_{ij}(\mathbf{V}) \nabla_j u_i \right]. \quad (481)$$

Les taux à l'ordre 1 peuvent donc être calculés explicitement avec les relations ci-dessus.

## 3.6 Taux de déclin au premier ordre

### 3.6.1 Démarche générale

Pour obtenir les équations hydrodynamiques à l'ordre Navier-Stokes, il faut encore calculer explicitement les taux de déclin à l'ordre un. Interviennent alors les intégrales  $\omega[f^{(0)}, f^{(1)}]$ ,  $\omega[V_i^k f^{(0)}, V_i^l f^{(1)}]$ ,  $(k, l) \in \{(1, 0), (0, 1)\}$ ,  $\omega[V^k f^{(0)}, V^l f^{(1)}]$ ,  $(k, l) \in \{(2, 0), (0, 2)\}$ . On va donc devoir procéder en suivant une démarche générale en exploitant les symétries, jusqu'à un certain point. En effet, les termes de contribution non nulle dans  $\omega[V^k f^{(0)}, V^l f^{(1)}]$ ,  $(k, l) \in \{(0, 0), (2, 0), (0, 2)\}$ , seront de contribution nulle dans  $\omega[V_i^k f^{(0)}, V_i^l f^{(1)}]$  et vice-versa, à cause de la modification des propriétés générales de symétrie due aux poids. Notons ainsi

$$\omega[Af^{(0)}, Bf^{(1)}], \quad (482)$$

où

$$(A, B) \in \{(1, 1), (V_2^2, 1), (1, V_1^2), (V_{2i}, 1), (1, V_{1i})\}. \quad (483)$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\omega[Af^{(0)}, Bf^{(1)}] &= \sigma^{d-1} \beta_1 \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 |\mathbf{v}_{12}| \times \\
&\quad \times \left[ -\frac{\beta^3}{n} \mathcal{M}(V_1) \right] \left[ \frac{2m}{d+2} S_i(V_1) (\kappa \nabla_i T + \mu \nabla_i n) + \frac{\eta}{\beta} D_{ij}(V_1) \nabla_j u_i \right] \times \\
&\quad \times \mathcal{M}(V_2) [1 + a_2 S_2(c_2^2)] A(\mathbf{V}_2) B(\mathbf{V}_1) \\
&= -\beta_1 \frac{\sigma^{d-1} \beta^3 n}{\pi^d} v_T \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\mathbf{c}_1 d\mathbf{c}_2 |\mathbf{c}_{12}| e^{-c_1^2} e^{-c_2^2} A(v_T \mathbf{c}_2) B(v_T \mathbf{c}_1) [1 + a_2 S_2(c_2^2)] \times \\
&\quad \times \left[ \frac{2m}{d+2} S_i(V_1) (\kappa \nabla_i T + \mu \nabla_i n) + \frac{\eta}{\beta} D_{ij}(V_1) \nabla_j u_i \right] \\
&= -\beta_1 \frac{\sigma^{d-1} \beta^3 n}{\pi^d} v_T \frac{2m}{d+2} (\kappa \nabla_i T + \mu \nabla_i n) \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\mathbf{c}_1 d\mathbf{c}_2 A(v_T \mathbf{c}_2) B(v_T \mathbf{c}_1) \times \\
&\quad \times |\mathbf{c}_{12}| e^{-c_1^2} e^{-c_2^2} [1 + a_2 S_2(c_2^2)] \left( \frac{m}{2} v_T^2 c_1^2 - \frac{d+2}{2} k_B T \right) v_T c_{1i} \\
&\quad - \beta_1 \frac{\sigma^{d-1} \beta^3 n}{\pi^d} v_T \frac{\eta}{\beta} \nabla_j u_i \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\mathbf{c}_1 d\mathbf{c}_2 A(v_T \mathbf{c}_2) B(v_T \mathbf{c}_1) \times \\
&\quad \times |\mathbf{c}_{12}| e^{-c_1^2} e^{-c_2^2} [1 + a_2 S_2(c_2^2)] m \left( v_T^2 c_{1i} c_{1j} - \frac{1}{d} v_T^2 c_1^2 \delta_{ij} \right). \quad (484)
\end{aligned}$$

Passage dans les coordonnées du centre de masse :

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{c}_{12} &= \mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2 \\ \mathbf{C} &= \frac{1}{2}(\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2) \end{aligned} \right\} \implies \left\{ \begin{aligned} \mathbf{c}_1 &= \mathbf{C} + \frac{1}{2}\mathbf{c}_{12} \\ \mathbf{c}_2 &= \mathbf{C} - \frac{1}{2}\mathbf{c}_{12} \end{aligned} \right. \quad (485)$$

Ainsi

$$c_1^2 + c_2^2 = 2C^2 + \frac{1}{2}c_{12}^2, \quad (486)$$

$$c_{\frac{1}{2}}^2 = C^2 + \frac{1}{4}c_{12}^2 \pm (\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) \quad (487)$$

$$\begin{aligned}
S_2(c_2^2) &= \frac{1}{2}c_2^4 - \frac{d+2}{2}c_2^2 + \frac{d(d+2)}{4} \\
&\vdots \\
&= \frac{1}{2}C^4 + \frac{1}{32}c_{12}^4 + \frac{1}{4}C^2 c_{12}^2 - \frac{d+2}{2}C^2 - \frac{d+2}{8}c_{12}^2 + \frac{1}{2}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})^2 \\
&\quad - C^2(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) - \frac{1}{4}c_{12}^2(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) + \frac{d(d+2)}{2}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) + \frac{d(d+2)}{4}, \quad (488)
\end{aligned}$$

ce qui donne dans (484)

$$\begin{aligned}
\omega[Af^{(0)}, Bf^{(1)}] &= -\beta_1 \frac{\sigma^{d-1} \beta^3 n}{\pi^d} v_T \frac{2m}{d+2} (\kappa \nabla_i T + \mu \nabla_i n) I_1 \\
&\quad - \beta_1 \frac{\sigma^{d-1} \beta^3 n}{\pi^d} v_T \frac{\eta}{\beta} \nabla_j u_i I_2, \quad (489)
\end{aligned}$$

où

$$I_1 = \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{c}_{12} |c_{12}| e^{-c_{12}^2/2} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{C} e^{-2C^2} A(v_T \mathbf{c}_2) B(v_T \mathbf{c}_1) \times$$

$$\times \underbrace{\left[ C^2 + \frac{1}{4} c_{12}^2 + (\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) - \frac{d+2}{2} \right] \left( C_i + \frac{1}{2} c_{12i} \right) [1 + a_2 S_2(c_2^2)]}_{\doteq K_1} \quad (490)$$

$$I_2 = \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{c}_{12} |c_{12}| e^{-c_{12}^2/2} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{C} e^{-2C^2} A(v_T \mathbf{c}_2) B(v_T \mathbf{c}_1) \times$$

$$\times \underbrace{\left[ \left( C_i + \frac{1}{2} c_{12i} \right) \left( C_j + \frac{1}{2} c_{12j} \right) - \frac{1}{d} \delta_{ij} C^2 - \frac{1}{d} \delta_{ij} \frac{1}{4} c_{12}^2 - \frac{1}{d} \delta_{ij} (\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) \right] [1 + a_2 S_2(c_2^2)]}_{\doteq K_2}, \quad (491)$$

avec  $S_2(c_2^2)$  exprimé à l'aide de (488) en fonction des nouvelles variables. Utilisant  $\kappa = \kappa_0 \kappa^*$ ,  $\mu = (T\kappa_0/n)\mu^*$ ,  $\eta = \eta_0 \eta^*$ ,  $\kappa_0 = d(d+2)k_B/[2(d-1)m]\eta_0$ , il vient

$$\omega[Af^{(0)}, Bf^{(1)}] = -\frac{\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)} \frac{\sigma^{d-1} \beta^3 n}{\pi^d} \left(\frac{2}{\beta m}\right)^2 \frac{2m}{d+2} \frac{m}{2} (\kappa \nabla_i T + \mu \nabla_i n) I_1$$

$$-\frac{\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)} \frac{\sigma^{d-1} \beta^3 n}{\pi^d} \frac{2}{\beta m} \sqrt{\frac{2}{\beta m}} \frac{m}{\beta} \eta \nabla_j u_i I_2$$

$$\vdots$$

$$= -\frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)} \frac{1}{\pi^d} \frac{d(d+2)}{4\sqrt{2}(d-1)} n v_T \left( \kappa^* \frac{1}{T} \nabla_i T + \mu^* \frac{1}{n} \nabla_i n \right) I_1$$

$$-\frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)} \frac{1}{\pi^d} \frac{d+2}{4} \sqrt{2} n \eta^* \nabla_j u_i I_2. \quad (492)$$

La démarche consiste ensuite à développer  $K_1$  et  $K_2$  (à l'aide d'un logiciel de calcul symbolique) et éliminer les termes dont la contribution à l'intégrale sera nulle pour des raisons de symétrie. Ainsi, on constate que les termes suivants seront de contribution nulle :

$$\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{c}_{12} |c_{12}|^n e^{-c_{12}^2/2} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{C} C^m e^{-2C^2} F(\mathbf{C}, \mathbf{c}_{12}) = 0, \quad (493)$$

$$F(\mathbf{C}, \mathbf{c}_{12}) = \{C_i, c_{12i}, C_i c_{12j}, (\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})^{2p+1}, C_i (\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})^p, C_{12i} (\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})^p,$$

$$C_i C_j (\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})^{2p+1}, c_{12i} c_{12j} (\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})^{2p+1}, C_i c_{12j} (\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})^{2p}\}, \quad (494)$$

où  $p \in \mathbb{N}$ . Il y a donc nullité dès la présence d'une puissance impaire de l'une des deux variables (ou les deux). En effet, pour s'en convaincre il suffit de faire le changement de variables  $(\mathbf{C}, \mathbf{c}_{12}) \mapsto$

$(-\mathbf{C}, \mathbf{c}_{12})$  ou  $(\mathbf{C}, \mathbf{c}_{12}) \mapsto (\mathbf{C}, -\mathbf{c}_{12})$  ou  $(\mathbf{C}, \mathbf{c}_{12}) \mapsto (-\mathbf{C}, -\mathbf{c}_{12})$ , selon les cas. On obtient :

$$\begin{aligned}
K_1 = & -\frac{1}{2}c_{12i} + \frac{1}{2}c^2c_{12i} + \frac{1}{8}c_{12}^2c_{12i} - C_i + C^2C_i + \frac{1}{4}c_{12}^2C_i - \frac{d}{4}c_{12i} - \frac{d}{2}C_i + \frac{1}{2}c_{12i}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) \\
& + C_i(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) + a_2 \left[ \frac{1}{2}C^2c_{12i} - \frac{3}{4}C^4c_{12i} + \frac{1}{4}C^6c_{12i} + \frac{1}{8}c_{12}^2c_{12i} - \frac{3}{8}C^2c_{12}^2c_{12i} + \frac{3}{16}C^4c_{12}^2c_{12i} \right. \\
& - \frac{3}{64}c_{12}^4c_{12i} + \frac{3}{64}C^2c_{12}^4c_{12i} + \frac{1}{256}c_{12}^6c_{12i} + C^2C_i - \frac{3}{2}C^4C_i + \frac{1}{2}C^6C_i + \frac{1}{4}c_{12}^2C_i \\
& - \frac{3}{4}C^2c_{12}^2C_i + \frac{3}{8}C^4c_{12}^2C_i - \frac{3}{32}c_{12}^4C_i + \frac{3}{32}C^2c_{12}^4C_i + \frac{1}{128}c_{12}^6C_i - \frac{d}{4}c_{12i} + \frac{3d}{4}C^2c_{12i} \\
& - \frac{3d}{8}C^4c_{12i} + \frac{3d}{16}c_{12}^2c_{12i} - \frac{3d}{16}C^2c_{12}^2c_{12i} - \frac{3d}{128}c_{12}^4c_{12i} - \frac{d}{2}C_i + \frac{3d}{2}C^2C_i - \frac{3d}{4}C^4C_i \\
& + \frac{3d}{8}c_{12}^2C_i - \frac{3d}{8}C^2c_{12}^2C_i - \frac{3d}{64}c_{12}^4C_i - \frac{d^2}{4}c_{12i} + \frac{d^2}{4}C^2c_{12i} + \frac{d^2}{16}c_{12}^2c_{12i} - \frac{d^2}{2}C_i + \frac{d^2}{2}C^2C_i \\
& + \frac{d^2}{8}c_{12}^2C_i - \frac{d^3}{16}c_{12i} - \frac{d^3}{8}C_i - \frac{1}{4}C^4c_{12i}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) - \frac{1}{8}C^2c_{12}^2c_{12i}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) - \frac{1}{64}c_{12}^4c_{12i}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) \\
& - \frac{1}{2}C^4C_i(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) - \frac{1}{4}C^2c_{12}^2C_i(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) - \frac{1}{32}c_{12}^4C_i(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) - \frac{d}{4}c_{12i}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) \\
& + \frac{d}{2}C^2c_{12i}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) + \frac{d}{8}c_{12}^2c_{12i}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) - \frac{d}{2}C_i(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) + dC^2C_i(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) + \frac{d}{4}c_{12}^2C_i(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) \\
& - \frac{3d^2}{8}c_{12i}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) + \frac{d^2}{4}C^2c_{12i}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) + \frac{d^2}{16}c_{12}^2c_{12i}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) - \frac{3d^2}{4}C_i(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) \\
& + \frac{d^2}{2}C^2C_i(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) + \frac{d^2}{8}c_{12}^2C_i(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) - \frac{d^3}{8}c_{12i}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) - \frac{d^3}{4}C_i(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) \\
& - \frac{1}{4}c_{12i}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})^2 - \frac{1}{4}C^2c_{12i}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})^2 - \frac{1}{16}c_{12}^2c_{12i}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})^2 - \frac{1}{2}C_i(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})^2 \\
& - \frac{1}{2}C^2C_i(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})^2 - \frac{1}{8}c_{12}^2C_i(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})^2 + \frac{3d}{8}c_{12i}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})^2 + \frac{3d}{4}C_i(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})^2 \\
& \left. + \frac{d^2}{4}c_{12i}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})^2 + \frac{d^2}{2}C_i(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})^2 + \frac{1}{4}c_{12i}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})^3 + \frac{1}{2}C_i(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})^3 \right], \tag{495}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
K_2 = & \frac{1}{4}c_{12i}c_{12j} + \frac{1}{2}c_{12j}C_i + \frac{1}{2}c_{12i}C_j + C_iC_j - \frac{1}{d}\delta_{ij}C^2 - \frac{1}{4d}\delta_{ij}c_{12}^2 - \frac{1}{d}\delta_{ij}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) \\
& + a_2 \left[ -\frac{1}{4}C^2c_{12i}c_{12j} + \frac{1}{8}C^4c_{12i}c_{12j} - \frac{1}{16}c_{12}^2c_{12i}c_{12j} + \frac{1}{16}C^2c_{12}^2c_{12i}c_{12j} + \frac{1}{128}c_{12}^4c_{12i}c_{12j} \right. \\
& - \frac{1}{2}C^2c_{12j}C_i + \frac{1}{4}C^4c_{12j}C_i - \frac{1}{8}c_{12}^2c_{12j}C_i + \frac{1}{8}C^2c_{12}^2c_{12j}C_i + \frac{1}{64}c_{12}^4c_{12j}C_i - \frac{1}{2}C^2c_{12i}C_j \\
& + \frac{1}{4}C^4c_{12i}C_j - \frac{1}{8}c_{12}^2c_{12i}C_j + \frac{1}{8}C^2c_{12}^2c_{12i}C_j + \frac{1}{64}c_{12}^4c_{12i}C_j - C^2C_iC_j + \frac{1}{2}C^4C_iC_j \\
& - \frac{1}{4}c_{12}^2C_iC_j + \frac{1}{4}C^2c_{12}^2C_iC_j + \frac{1}{32}c_{12}^4C_iC_j + \frac{d}{8}c_{12i}c_{12j} - \frac{d}{8}C^2c_{12i}c_{12j} - \frac{d}{32}c_{12}^2c_{12i}c_{12j} \\
& + \frac{d}{4}c_{12j}C_i - \frac{d}{4}C^2c_{12j}C_i - \frac{d}{16}c_{12}^2c_{12j}C_i + \frac{d}{4}c_{12i}C_j - \frac{d}{4}C^2c_{12i}C_j - \frac{d}{16}c_{12}^2c_{12i}C_j + \frac{d}{2}C_iC_j \\
& - \frac{d}{2}C^2C_iC_j - \frac{d}{8}c_{12}^2C_iC_j + \frac{d^2}{16}c_{12i}c_{12j} + \frac{d^2}{8}c_{12j}C_i + \frac{d^2}{8}c_{12i}C_j + \frac{d^2}{4}C_iC_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}C^2 \\
& + \frac{1}{2}\delta_{ij}C^4 - \frac{1}{8}\delta_{ij}c_{12}^2 + \frac{1}{4}\delta_{ij}C^2c_{12}^2 + \frac{1}{32}\delta_{ij}c_{12}^4 + \frac{1}{d}\delta_{ij}C^4 - \frac{1}{2d}\delta_{ij}C^6 + \frac{1}{2d}\delta_{ij}C^2c_{12}^2 \\
& - \frac{3}{8d}\delta_{ij}C^4c_{12}^2 + \frac{1}{16d}\delta_{ij}c_{12}^4 - \frac{3}{32d}\delta_{ij}C^2c_{12}^4 - \frac{1}{128d}\delta_{ij}c_{12}^6 - \frac{d}{4}\delta_{ij}C^2 - \frac{d}{16}\delta_{ij}c_{12}^2 \\
& - \frac{1}{4}C^2c_{12i}c_{12j}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) - \frac{1}{16}c_{12}^2c_{12i}c_{12j}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) - \frac{1}{2}C^2c_{12j}C_i(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) \\
& - \frac{1}{8}c_{12}^2c_{12j}C_i(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) - \frac{1}{2}C^2c_{12i}C_j(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) - \frac{1}{8}c_{12}^2c_{12i}C_j(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) - C^2C_iC_j(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) \\
& - \frac{1}{4}c_{12}^2C_iC_j(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) + \frac{d}{4}c_{12i}c_{12j}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) + \frac{d}{2}c_{12j}C_i(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) + \frac{d}{2}c_{12i}C_j(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) \\
& + dC_iC_j(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) + \frac{d^2}{8}c_{12i}c_{12j}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) + \frac{d^2}{4}c_{12j}C_i(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) + \frac{d^2}{4}c_{12i}C_j(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) \\
& + \frac{d^2}{2}C_iC_j(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) - \frac{1}{2}\delta_{ij}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) - \frac{1}{2}\delta_{ij}C^2(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) - \frac{1}{8}\delta_{ij}c_{12}^2(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) + \frac{1}{d}\delta_{ij}C^2(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) \\
& + \frac{1}{2d}\delta_{ij}C^4(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) + \frac{1}{4d}\delta_{ij}c_{12}^2(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) + \frac{1}{4d}\delta_{ij}C^2c_{12}^2(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) + \frac{1}{32d}\delta_{ij}c_{12}^4(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) \\
& - \frac{d}{4}\delta_{ij}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) - \frac{d}{2}\delta_{ij}C^2(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) - \frac{d}{8}\delta_{ij}c_{12}^2(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) + \frac{1}{8}c_{12i}c_{12j}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})^2 \\
& + \frac{1}{4}c_{12j}C_i(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})^2 + \frac{1}{4}c_{12i}C_j(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})^2 + \frac{1}{2}C_iC_j(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})^2 - \delta_{ij}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})^2 \\
& \left. + \frac{1}{2d}\delta_{ij}C^2(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})^2 + \frac{1}{8d}\delta_{ij}c_{12}^2(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})^2 - \frac{d}{2}\delta_{ij}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})^2 - \frac{1}{2d}\delta_{ij}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})^3 \right]. \quad (496)
\end{aligned}$$

Observant l'ensemble (483) donnant les moments multipliant  $K_1$  et  $K_2$ , on constate que dans les nouvelles coordonnées  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{c}_{12}$  on obtient les moments pairs  $\{C^2, c_{12}^2, 1\}$  et les moments impairs  $(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})$ ,  $C_q$ , et  $c_{12q}$ , où  $q \in \{1, \dots, d\}$ . Ainsi nous devons établir séparément quelles sont les contributions non nulles de  $K_1$  et  $K_2$  pour les différents poids issus de  $A$  et  $B$ . Les contributions non nulles correspondantes seront ainsi notées

$$K_i^{C^2, c_{12}^2}, \quad K_i^{(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})}, \quad K_i^{C_q}, \quad K_i^{c_{12q}}, \quad i = 1, 2, \quad q = 1, \dots, d. \quad (497)$$

Par exemple,  $K_i^{C_q}$ ,  $i = 1, 2$ , sera défini par les termes de  $K_i$  qui vérifient

$$\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{c}_{12} |c_{12}| e^{-c_{12}^2/2} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{C} e^{-2C^2} (C_q K_i) = \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{c}_{12} |c_{12}| e^{-c_{12}^2/2} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{C} e^{-2C^2} (C_q K_i^{C_q}). \quad (498)$$

Notons que par symétrie  $K_i^{C^2, c_{12}^2} = K_i^{1,1}$ . Ainsi, on voit tout de suite que

$$K_1^{C^2, c_{12}^2} = 0, \quad (499)$$

car chaque moment de l'Eq. (490) comporte un terme impair  $C_i$  ou  $c_{12i}$ , sans produit  $C_i c_{12i}$ . Ceci se vérifie facilement aussi explicitement à l'aide de l'Eq. (495). De même, pour des raisons similaires on établit que

$$K_1^{(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})} = 0. \quad (500)$$

De plus, on constate de l'Eq. (491) que chaque moment sera de la forme  $C_i c_{12j}$  ou  $(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})^p$ ,  $p \geq 0$ . Donc si on multiplie ces moments par  $C_q$  ou  $c_{12q}$  leur contribution sera nulle. Ainsi

$$K_2^{C_q} = K_2^{c_{12q}} = 0. \quad (501)$$

A nouveau, ceci peut être vérifié explicitement avec l'Eq. (496). Utilisant ces résultats, on obtient pour les différentes valeurs de  $A$  et  $B$ .

- $(A, B) = (1, 1)$  :

$$I_1^{1,1} = \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{c}_{12} |\mathbf{c}_{12}| e^{-c_{12}^2/2} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{C} e^{-2C^2} K_1^{C^2, c_{12}^2} \stackrel{(499)}{=} 0, \quad (502)$$

$$I_2^{1,1} = \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{c}_{12} |\mathbf{c}_{12}| e^{-c_{12}^2/2} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{C} e^{-2C^2} K_2^{C^2, c_{12}^2}. \quad (503)$$

- $(A, B) = (V_2^2, 1)$  : utilisant  $c_2^2 = C^2 + c_{12}^2/4 - (\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})$  il vient :

$$I_1^{V_2^2, 1} = v_T^2 \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{c}_{12} |\mathbf{c}_{12}| e^{-c_{12}^2/2} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{C} e^{-2C^2} \times \\ \times \left[ C^2 K_1^{C^2, c_{12}^2} + \frac{1}{4} c_{12}^2 K_1^{C^2, c_{12}^2} - (\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) K_1^{(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})} \right] \stackrel{(499)}{\stackrel{(500)}}{=} 0, \quad (504)$$

$$I_2^{V_2^2, 1} = v_T^2 \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{c}_{12} |\mathbf{c}_{12}| e^{-c_{12}^2/2} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{C} e^{-2C^2} \times \\ \times \left[ C^2 K_2^{C^2, c_{12}^2} + \frac{1}{4} c_{12}^2 K_2^{C^2, c_{12}^2} - (\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) K_2^{(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})} \right]. \quad (505)$$

- $(A, B) = (1, V_1^2)$  : utilisant  $c_1^2 = C^2 + c_{12}^2/4 + (\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})$  il vient :

$$I_1^{1, V_1^2} = v_T^2 \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{c}_{12} |\mathbf{c}_{12}| e^{-c_{12}^2/2} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{C} e^{-2C^2} \times \\ \times \left[ C^2 K_1^{C^2, c_{12}^2} + \frac{1}{4} c_{12}^2 K_1^{C^2, c_{12}^2} + (\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) K_1^{(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})} \right] \stackrel{(499)}{\stackrel{(500)}}{=} 0, \quad (506)$$

$$I_2^{1, V_1^2} = v_T^2 \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{c}_{12} |\mathbf{c}_{12}| e^{-c_{12}^2/2} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{C} e^{-2C^2} \times \\ \times \left[ C^2 K_2^{C^2, c_{12}^2} + \frac{1}{4} c_{12}^2 K_2^{C^2, c_{12}^2} + (\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) K_2^{(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})} \right]. \quad (507)$$

- $(A, B) = (V_{2q}, 1)$  : utilisant  $\mathbf{c}_2 = \mathbf{C} - \mathbf{c}_{12}/2$  il vient :

$$I_1^{V_{2q}, 1} = v_T \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{c}_{12} |\mathbf{c}_{12}| e^{-c_{12}^2/2} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{C} e^{-2C^2} \left[ C_q K_1^{C_q} - \frac{1}{2} c_{12q} K_1^{c_{12q}} \right], \quad (508)$$

$$I_2^{V_{2q}, 1} = v_T \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{c}_{12} |\mathbf{c}_{12}| e^{-c_{12}^2/2} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{C} e^{-2C^2} \left[ C_q K_2^{C_q} - \frac{1}{2} c_{12q} K_2^{c_{12q}} \right] \stackrel{(501)}{=} 0. \quad (509)$$

- $(A, B) = (1, V_{1q})$  : utilisant  $\mathbf{c}_1 = \mathbf{C} + \mathbf{c}_{12}/2$  il vient :

$$I_1^{1, V_{1q}} = v_T \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{c}_{12} |\mathbf{c}_{12}| e^{-c_{12}^2/2} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{C} e^{-2C^2} \left[ C_q K_1^{C_q} + \frac{1}{2} c_{12q} K_1^{c_{12q}} \right], \quad (510)$$

$$I_2^{1, V_{1q}} = v_T \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{c}_{12} |\mathbf{c}_{12}| e^{-c_{12}^2/2} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{C} e^{-2C^2} \left[ C_q K_2^{C_q} + \frac{1}{2} c_{12q} K_2^{c_{12q}} \right] \stackrel{(501)}{=} 0. \quad (511)$$

Notons

$$\int = \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{c}_{12} |\mathbf{c}_{12}| e^{-c_{12}^2/2} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{C} e^{-2C^2}, \quad (512)$$

alors nous constatons qu'il est a priori nécessaire de calculer les 5 intégrales suivantes :

$$\int K_2^{C^2, c_{12}^2}, \quad \int (C^2 + \frac{1}{4}c_{12}^2) K_2^{C^2, c_{12}^2}, \quad \int (\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) K_2^{(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})}, \quad \int C_q K_1^{C_q}, \quad \int c_{12q} K_1^{c_{12q}}. \quad (513)$$

Néanmoins, comme  $\xi_T^{(1)}$  est proportionnel à la somme des Eqs. (505) et (507) (et (503)), on voit que le terme  $\int (\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) K_2^{(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})}$  se simplifie. De même, pour  $\xi_{u_i}^{(1)}$  qui est proportionnel à la somme des Eqs. (508) et (510), l'intégrale  $\int c_{12q} K_1^{c_{12q}}$  se simplifie. Il ne reste donc effectivement que 3 intégrales à calculer :

$$\int K_2^{C^2, c_{12}^2}, \quad \int (C^2 + \frac{1}{4}c_{12}^2) K_2^{C^2, c_{12}^2}, \quad \int C_q K_1^{C_q}. \quad (514)$$

Utilisant les Eqs. (495) et (496) on trouve

$$\begin{aligned} K_2^{C^2, c_{12}^2} &= \frac{1}{4}c_{12i}c_{12j} + C_i C_j - \frac{1}{d}\delta_{ij}C^2 - \frac{1}{4d}\delta_{ij}c_{12}^2 \\ &+ a_2 \left[ -\frac{1}{4}C^2c_{12i}c_{12j} + \frac{1}{8}C^4c_{12i}c_{12j} - \frac{1}{16}c_{12}^2c_{12i}c_{12j} + \frac{1}{16}C^2c_{12}^2c_{12i}c_{12j} + \frac{1}{128}c_{12}^4c_{12i}c_{12j} \right. \\ &- C^2C_iC_j + \frac{1}{2}C^4C_iC_j - \frac{1}{4}c_{12}^2C_iC_j + \frac{1}{4}C^2c_{12}^2C_iC_j + \frac{1}{32}c_{12}^4C_iC_j + \frac{d}{8}c_{12i}c_{12j} \\ &- \frac{d}{8}C^2c_{12i}c_{12j} - \frac{d}{32}c_{12}^2c_{12i}c_{12j} + \frac{d}{2}C_iC_j - \frac{d}{2}C^2C_iC_j - \frac{d}{8}c_{12}^2C_iC_j + \frac{d^2}{16}c_{12i}c_{12j} \\ &+ \frac{d^2}{4}C_iC_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}C^2 + \frac{1}{2}\delta_{ij}C^4 - \frac{1}{8}\delta_{ij}c_{12}^2 + \frac{1}{4}\delta_{ij}C^2c_{12}^2 + \frac{1}{32}\delta_{ij}c_{12}^4 + \frac{1}{d}\delta_{ij}C^4 - \frac{1}{2d}\delta_{ij}C^6 \\ &+ \frac{1}{2d}\delta_{ij}C^2c_{12}^2 - \frac{3}{8d}\delta_{ij}C^4c_{12}^2 + \frac{1}{16d}\delta_{ij}c_{12}^4 - \frac{3}{32d}\delta_{ij}C^2c_{12}^4 - \frac{1}{128d}\delta_{ij}c_{12}^6 - \frac{d}{4}\delta_{ij}C^2 \\ &- \frac{d}{16}\delta_{ij}c_{12}^2 - \frac{1}{2}C^2c_{12j}C_i(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) - \frac{1}{8}c_{12}^2c_{12j}C_i(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) - \frac{1}{2}C^2c_{12i}C_j(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) \\ &- \frac{1}{8}c_{12}^2c_{12i}C_j(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) + \frac{d}{2}c_{12j}C_i(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) + \frac{d}{2}c_{12i}C_j(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) + \frac{d^2}{4}c_{12j}C_i(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) \\ &+ \frac{d^2}{4}c_{12i}C_j(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) + \frac{1}{8}c_{12i}c_{12j}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})^2 + \frac{1}{2}C_iC_j(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})^2 - \delta_{ij}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})^2 \\ &\left. + \frac{1}{2d}\delta_{ij}C^2(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})^2 + \frac{1}{8d}\delta_{ij}c_{12}^2(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})^2 - \frac{d}{2}\delta_{ij}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})^2 \right]. \quad (515) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_2^{(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})} &= \frac{1}{2}c_{12j}C_i + \frac{1}{2}c_{12i}C_j - \frac{1}{d}\delta_{ij}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) \\
&+ a_2 \left[ -\frac{1}{2}C^2c_{12j}C_i + \frac{1}{4}C^4c_{12j}C_i - \frac{1}{8}c_{12}^2c_{12j}C_i + \frac{1}{8}C^2c_{12}^2c_{12j}C_i + \frac{1}{64}c_{12}^4c_{12j}C_i \right. \\
&- \frac{1}{2}C^2c_{12i}C_j + \frac{1}{4}C^4c_{12i}C_j - \frac{1}{8}c_{12}^2c_{12i}C_j + \frac{1}{8}C^2c_{12}^2c_{12i}C_j + \frac{1}{64}c_{12}^4c_{12i}C_j + \frac{d}{4}c_{12j}C_i \\
&- \frac{d}{4}C^2c_{12j}C_i - \frac{d}{16}c_{12}^2c_{12j}C_i + \frac{d}{4}c_{12i}C_j - \frac{d}{4}C^2c_{12i}C_j - \frac{d}{16}c_{12}^2c_{12i}C_j + \frac{d^2}{8}c_{12j}C_i \\
&+ \frac{d^2}{8}c_{12i}C_j - \frac{1}{4}C^2c_{12i}c_{12j}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) - \frac{1}{16}c_{12}^2c_{12i}c_{12j}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) - C^2C_iC_j(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) \\
&- \frac{1}{4}c_{12}^2C_iC_j(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) + \frac{d}{4}c_{12i}c_{12j}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) + dC_iC_j(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) + \frac{d^2}{8}c_{12i}c_{12j}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) \\
&+ \frac{d^2}{2}C_iC_j(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) - \frac{1}{2}\delta_{ij}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) - \frac{1}{2}\delta_{ij}C^2(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) - \frac{1}{8}\delta_{ij}c_{12}^2(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) \\
&+ \frac{1}{d}\delta_{ij}C^2(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) + \frac{1}{2d}\delta_{ij}C^4(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) + \frac{1}{4d}\delta_{ij}c_{12}^2(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) + \frac{1}{4d}\delta_{ij}C^2c_{12}^2(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) \\
&+ \frac{1}{32d}\delta_{ij}c_{12}^4(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) - \frac{d}{4}\delta_{ij}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) - \frac{d}{2}\delta_{ij}C^2(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) - \frac{d}{8}\delta_{ij}c_{12}^2(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) \\
&\left. + \frac{1}{4}c_{12j}C_i(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})^2 + \frac{1}{4}c_{12i}C_j(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})^2 - \frac{1}{2d}\delta_{ij}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})^3 \right]. \tag{516}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_1^{C_q} &= -C_i + C^2C_i + \frac{1}{4}c_{12}^2C_i - \frac{d}{2}C_i + \frac{1}{2}c_{12i}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) \\
&+ a_2 \left[ C^2C_i - \frac{3}{2}C^4C_i + \frac{1}{2}C^6C_i + \frac{1}{4}c_{12}^2C_i - \frac{3}{4}C^2c_{12}^2C_i + \frac{3}{8}C^4c_{12}^2C_i - \frac{3}{32}c_{12}^4C_i \right. \\
&+ \frac{3}{32}C^2c_{12}^4C_i + \frac{1}{128}c_{12}^6C_i - \frac{d}{2}C_i + \frac{3d}{2}C^2C_i - \frac{3d}{4}C^4C_i + \frac{3d}{8}c_{12}^2C_i - \frac{3d}{8}C^2c_{12}^2C_i \\
&- \frac{3d}{64}c_{12}^4C_i - \frac{d^2}{2}C_i + \frac{d^2}{2}C^2C_i + \frac{d^2}{8}c_{12}^2C_i - \frac{d^3}{8}C_i - \frac{1}{4}C^4c_{12i}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) \\
&- \frac{1}{8}C^2c_{12}^2c_{12i}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) - \frac{1}{64}c_{12}^4c_{12i}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) - \frac{d}{4}c_{12i}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) + \frac{d}{2}C^2c_{12i}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) \\
&+ \frac{d}{8}c_{12}^2c_{12i}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) - \frac{3d^2}{8}c_{12i}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) + \frac{d^2}{4}C^2c_{12i}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) + \frac{d^2}{16}c_{12}^2c_{12i}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) \\
&- \frac{d^3}{8}c_{12i}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) - \frac{d^3}{4}C_i(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) - \frac{1}{2}C_i(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})^2 - \frac{1}{2}C^2C_i(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})^2 - \frac{1}{8}c_{12}^2C_i(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})^2 \\
&\left. + \frac{3d}{4}C_i(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})^2 + \frac{d^2}{2}C_i(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})^2 + \frac{1}{4}c_{12i}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})^3 \right], \tag{517}
\end{aligned}$$

Ecrivons aussi l'expression de  $K_1^{c_{12q}}$  car les intégrales  $I_1^{1,V_{1q}}$  et  $I_1^{V_{2q},1}$  prises séparément (et non leur somme qui elle ne fait pas intervenir l'intégrale avec  $K_1^{c_{12q}}$ ) sont nécessaires pour un calcul des

Sects. 3.3.4.5 et 3.3.4.5.

$$\begin{aligned}
K_1^{c_{12}^q} &= -\frac{1}{2}c_{12i} + \frac{1}{2}c^2c_{12i} + \frac{1}{8}c_{12}^2c_{12i} - \frac{d}{4}c_{12i} + C_i(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) \\
&+ a_2 \left[ \frac{1}{2}C^2c_{12i} - \frac{3}{4}C^4c_{12i} + \frac{1}{4}C^6c_{12i} + \frac{1}{8}c_{12}^2c_{12i} - \frac{3}{8}C^2c_{12}^2c_{12i} + \frac{3}{16}C^4c_{12}^2c_{12i} - \frac{3}{64}c_{12}^4c_{12i} \right. \\
&+ \frac{3}{64}C^2c_{12}^4c_{12i} + \frac{1}{256}c_{12}^6c_{12i} - \frac{d}{4}c_{12i} + \frac{3d}{4}C^2c_{12i} - \frac{3d}{8}C^4c_{12i} + \frac{3d}{16}c_{12}^2c_{12i} - \frac{3d}{16}C^2c_{12}^2c_{12i} \\
&- \frac{3d}{128}c_{12}^4c_{12i} - \frac{d^2}{4}c_{12i} + \frac{d^2}{4}C^2c_{12i} + \frac{d^2}{16}c_{12}^2c_{12i} - \frac{d^3}{16}c_{12i} - \frac{1}{2}C^4C_i(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) \\
&- \frac{1}{4}C^2c_{12}^2C_i(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) - \frac{1}{32}c_{12}^4C_i(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) - \frac{d}{2}C_i(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) + dC^2C_i(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) \\
&+ \frac{d}{4}c_{12}^2C_i(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) - \frac{3d^2}{4}C_i(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) + \frac{d^2}{2}C^2C_i(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) + \frac{d^2}{8}c_{12}^2C_i(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) \\
&- \frac{d^3}{4}C_i(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) - \frac{1}{4}c_{12i}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})^2 - \frac{1}{4}C^2c_{12i}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})^2 - \frac{1}{16}c_{12}^2c_{12i}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})^2 \\
&\left. + \frac{3d}{8}c_{12i}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})^2 + \frac{d^2}{4}c_{12i}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})^2 + \frac{1}{2}C_i(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})^3 \right], \tag{518}
\end{aligned}$$

Notons que l'indice  $q$  est noté à présent  $i$ . Ceci n'a pas d'importance dans le résultat final à cause de l'isotropie des intégrales. On voit apparaître dans les expressions (515) à (517) des termes du type  $C_i c_{12j} C_k c_{12k}$  ainsi que  $C_i C_j (\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})^2 = C_i C_j C_k C_l c_{12k} c_{12l}$  qu'il faut intégrer. Nous aurons donc besoin de plusieurs relations intermédiaires, présentées dans la section suivante.

### 3.6.2 Relations intermédiaires

Pour établir les expressions des intégrales cherchées, nous aurons besoin des deux lemmes 3.6 (page 51) et 3.7 (page 52). Définissons

$$I^a[n] = \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{x} |\mathbf{x}|^n e^{-a\mathbf{x}^2} = \frac{\pi^{d/2}}{a^{(d+n)/2}} \frac{\Gamma\left(\frac{d+n}{2}\right)}{\Gamma(d/2)}, \tag{519}$$

et notons dans les lemmes mentionnés ci-dessus  $M_{ij}[n] = M_{ij}^a[n]$ ,  $M_{ijkl}[n] = M_{ijkl}^a[n]$ . Ainsi, comme  $M_{ij}^a = M^a \delta_{ij}$  où  $M^a$  est défini par l'Eq. (354), alors

$$M_{jk}^a M_{ik}^{a'} = M_{ik}^a M_{jk}^{a'} = M^a M^{a'} \delta_{ij}. \tag{520}$$

De plus

$$M_{kl}^a M_{kl}^{a'} = d M^a M^{a'}. \tag{521}$$

**Lemme 3.9** Soit  $M_{kl}^{a'}$  défini par le lemme 3.6, et  $M_{ijkl}^a$  ainsi que  $b^a$  définis par le lemme 3.7, alors

$$M_{ijkl}^a M_{kl}^{a'} = \frac{d+2}{3} b^a M^{a'} \delta_{ij}. \tag{522}$$

**Preuve.** Utilisant l'Eq. (360) il vient

$$\begin{aligned}
M_{ijkl}^a M_{kl}^{a'} &= b^a M^{a'} \underbrace{\delta_{ijk} \delta_{kl}}_{\substack{=\delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{ik} \delta_{kl} \\ =\delta_{ij} \sum_{kl} \delta_{kl} \delta_{ik} \\ =\delta_{ij}}} + \frac{b^a}{3} M^{a'} [\delta_{ij} \delta_{kl} (1 - \delta_{ik}) + \delta_{ik} \delta_{jl} (1 - \delta_{ij}) + \delta_{il} \delta_{jk} (1 - \delta_{ij})] \delta_{kl} \\
&= b^a M^{a'} \delta_{ij} + \frac{b^a}{3} M^{a'} \left[ \underbrace{\delta_{ij} \sum_{kl} \delta_{kl} (1 - \delta_{ik})}_{\substack{=\sum_{kl} \delta_{kl} - \sum_k \delta_{ik} \sum_l \delta_{lk} \\ =d - \sum_k \delta_{ik}}} + \underbrace{(1 - \delta_{ij}) \sum_{kl} \delta_{ik} \delta_{jl} \delta_{kl}}_{\substack{=\sum_k \delta_{ik} \sum_l \delta_{jl} \delta_{kl} \\ =\delta_{jk}}} + \underbrace{(1 - \delta_{ij}) \sum_{kl} \delta_{il} \delta_{jk} \delta_{kl}}_{\substack{=\sum_k \delta_{jk} \sum_l \delta_{il} \delta_{kl} \\ =\delta_{ij}}} \right] \\
&= b^a M^{a'} \delta_{ij} + \frac{b^a}{3} M^{a'} \left[ \delta_{ij} (d - 1) + \underbrace{(1 - \delta_{ij}) \delta_{ij}}_{\substack{=\delta_{ij} - \delta_{ij}^2 \\ =0}} + \underbrace{(1 - \delta_{ij}) \delta_{ij}}_{\substack{=\delta_{ij} - \delta_{ij}^2 \\ =0}} \right] \\
&= b^a M^{a'} \delta_{ij} \left( 1 + \frac{d-1}{3} \right) \\
&= \frac{d+2}{3} b^a M^{a'} \delta_{ij}, \tag{523}
\end{aligned}$$

ce qui est bien le résultat cherché. ■

**Lemme 3.10** Soient  $M_{ijkl}^a$  et  $b^a$  définis par le lemme 3.7, alors

$$M_{iklm}^a M_{jklm}^{a'} = \frac{d+2}{3} b^a b^{a'} \delta_{ij}. \tag{524}$$

**Preuve.** Utilisant l'Eq. (360) il vient

$$\begin{aligned}
M_{iklm}^a M_{jklm}^{a'} &= \left[ b^a \delta_{iklm} + \frac{b^a}{3} \{ \delta_{ik} \delta_{lm} (1 - \delta_{il}) + \delta_{il} \delta_{km} (1 - \delta_{ik}) + \delta_{im} \delta_{kl} (1 - \delta_{ik}) \} \right] \times \\
&\quad \times \left[ b^a \delta_{jklm} + \frac{b^a}{3} \{ \delta_{jk} \delta_{lm} (1 - \delta_{jl}) + \delta_{jl} \delta_{km} (1 - \delta_{jk}) + \delta_{jm} \delta_{kl} (1 - \delta_{jk}) \} \right] \\
&= b^a b^{a'} \delta_{iklm} \delta_{jklm} \\
&\quad + \frac{b^a b^{a'}}{3} \delta_{iklm} \{ \delta_{jk} \delta_{lm} (1 - \delta_{jl}) + \delta_{jl} \delta_{km} (1 - \delta_{jk}) + \delta_{jm} \delta_{kl} (1 - \delta_{jk}) \} \\
&\quad + \frac{b^a b^{a'}}{3} \delta_{jklm} \{ \delta_{ik} \delta_{lm} (1 - \delta_{il}) + \delta_{il} \delta_{km} (1 - \delta_{ik}) + \delta_{im} \delta_{kl} (1 - \delta_{ik}) \} \\
&\quad + \frac{b^a b^{a'}}{9} \{ \delta_{ik} \delta_{lm} (1 - \delta_{il}) + \delta_{il} \delta_{km} (1 - \delta_{ik}) + \delta_{im} \delta_{kl} (1 - \delta_{ik}) \} \times \\
&\quad \quad \times \{ \delta_{jk} \delta_{lm} (1 - \delta_{jl}) + \delta_{jl} \delta_{km} (1 - \delta_{jk}) + \delta_{jm} \delta_{kl} (1 - \delta_{jk}) \}, \tag{525}
\end{aligned}$$

avec

$$\delta_{iklm} \delta_{jklm} = \sum_{klm} \delta_{ik} \delta_{kl} \delta_{lm} \delta_{jk} \delta_{kl} \delta_{lm} = \sum_k \delta_{ik} \delta_{jk} \sum_l \delta_{kl} \sum_m \delta_{lm} = \delta_{ij}, \tag{526}$$

$$\begin{aligned}
\delta_{iklm}\delta_{jk}\delta_{lm}(1 - \delta_{jl}) &= \sum_{klm} \delta_{ik}\delta_{kl}\delta_{lm}\delta_{jk}\delta_{lm} - \sum_{klm} \delta_{ik}\delta_{kl}\delta_{lm}\delta_{jk}\delta_{lm}\delta_{jl} \\
&= \sum_k \delta_{ik}\delta_{jk} \sum_l \delta_{kl} \sum_m \delta_{lm} - \sum_k \delta_{ik}\delta_{jk} \sum_l \delta_{kl}\delta_{jl} \sum_m \delta_{lm} \\
&= \delta_{ij} - \sum_k \delta_{ik}\delta_{jk}\delta_{kj} \\
&= \delta_{ij} - \delta_{ij} \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{527}$$

$$\begin{aligned}
\delta_{iklm}\delta_{jl}\delta_{km}(1 - \delta_{jj}) &= \sum_{klm} \delta_{ik}\delta_{kl}\delta_{lm}\delta_{jl}\delta_{km} - \sum_{klm} \delta_{ik}\delta_{kl}\delta_{lm}\delta_{jl}\delta_{km}\delta_{jk} \\
&= \sum_k \delta_{ik} \sum_l \delta_{kl}\delta_{jl} \sum_m \delta_{km} - \sum_k \delta_{ik}\delta_{jk} \sum_l \delta_{kl}\delta_{jl} \sum_m \delta_{lm}\delta_{km} \\
&= \delta_{ij} - \sum_k \delta_{ik}\delta_{jk}\delta_{kj}\delta_{jl}\delta_{lk} \\
&= \delta_{ij} - \delta_{ij} \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{528}$$

$$\begin{aligned}
\delta_{iklm}\delta_{jm}\delta_{kl}(1 - \delta_{jk}) &= \sum_{klm} \delta_{ik}\delta_{kl}\delta_{lm}\delta_{jm}\delta_{kl} - \sum_{klm} \delta_{ik}\delta_{kl}\delta_{lm}\delta_{jm}\delta_{kl}\delta_{jk} \\
&= \sum_k \delta_{ik} \sum_l \delta_{kl} \sum_m \delta_{lm}\delta_{jm} - \sum_k \delta_{ik}\delta_{jk} \sum_l \delta_{kl} \sum_m \delta_{lm}\delta_{jm} \\
&= \delta_{ij} - \delta_{ij} \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{529}$$

Pour les sommes avec  $\delta_{jklm}$  il suffit d'échanger les indices  $i$  et  $j$  dans les Eqs. (527) à (529), pour obtenir ainsi la nullité de ces sommes. Le calcul des autres termes de l'Eq. (525) donne

$$\begin{aligned}
\delta_{ik}\delta_{lm}(1 - \delta_{ij})\delta_{jk}\delta_{lm}(1 - \delta_{jl}) &= \sum_{klm} \delta_{ik}\delta_{lm}\delta_{jk}\delta_{lm} + \sum_{klm} \delta_{ik}\delta_{lm}\delta_{il}\delta_{jk}\delta_{lm}\delta_{jl} \\
&\quad - \sum_{klm} \delta_{ik}\delta_{lm}\delta_{il}\delta_{jk}\delta_{lm} - \sum_{klm} \delta_{ik}\delta_{lm}\delta_{jk}\delta_{lm}\delta_{lj} \\
&= \sum_k \delta_{ik}\delta_{jk} \sum_l \sum_m \delta_{lm} + \sum_k \delta_{ik}\delta_{jk} \sum_l \delta_{il}\delta_{jl} \sum_m \delta_{lm} \\
&\quad - \sum_k \delta_{ik}\delta_{jk} \sum_l \delta_{il} \sum_m \delta_{lm} - \sum_k \delta_{ik}\delta_{jk} \sum_l \delta_{jl} \sum_m \delta_{lm} \\
&= d\delta_{ij} + \delta_{ij} - \delta_{ij} - \delta_{ij} \\
&= \delta_{ij}(d - 1),
\end{aligned} \tag{530}$$

$$\begin{aligned}
\delta_{ik}\delta_{lm}(1 - \delta_{il})\delta_{jl}\delta_{km}(1 - \delta_{jk}) &= \sum_{klm} \delta_{ik}\delta_{lm}\delta_{jl}\delta_{km} + \sum_{klm} \delta_{ik}\delta_{lm}\delta_{il}\delta_{jl}\delta_{km}\delta_{jk} \\
&\quad - \sum_{klm} \delta_{ik}\delta_{lm}\delta_{il}\delta_{jk}\delta_{km} - \sum_{klm} \delta_{ik}\delta_{lm}\delta_{jl}\delta_{km}\delta_{jk} \\
&= \sum_k \delta_{ik} \sum_l \delta_{jl} \sum_m \delta_{lm}\delta_{km} + \sum_k \delta_{ik}\delta_{jk} \sum_l \delta_{il}\delta_{jl} \sum_m \delta_{lm}\delta_{km} \\
&\quad - \sum_k \delta_{ik} \sum_l \delta_{il}\delta_{jl} \sum_m \delta_{lm}\delta_{km} - \sum_k \delta_{ik}\delta_{jk} \sum_l \delta_{jl} \sum_m \delta_{lm}\delta_{km} \\
&= \sum_k \delta_{ik} \sum_l \delta_{jl}\delta_{lk} + \sum_k \delta_{ik}\delta_{jk} \sum_l \delta_{il}\delta_{jl}\delta_{lk} \\
&\quad - \sum_k \delta_{ik} \sum_l \delta_{il}\delta_{jl}\delta_{lk} - \sum_k \delta_{ik}\delta_{jk} \sum_l \delta_{jl}\delta_{lk} \\
&= \delta_{ij} + \sum_k \delta_{ik}\delta_{jk}\delta_{ij}\delta_{ik} - \sum_k \delta_{ik}\delta_{ij}\delta_{ik} - \delta_{ij} \\
&= 0, \tag{531}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_{ik}\delta_{lm}(1 - \delta_{il})\delta_{jm}\delta_{kl}(1 - \delta_{jk}) &= \sum_{klm} \delta_{ik}\delta_{lm}\delta_{jm}\delta_{kl} + \sum_{klm} \delta_{ik}\delta_{lm}\delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kl}\delta_{jk} \\
&\quad - \sum_{klm} \delta_{ik}\delta_{lm}\delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kl} - \sum_{klm} \delta_{ik}\delta_{lm}\delta_{jm}\delta_{kl}\delta_{jk} \\
&= \sum_k \delta_{ik} \sum_l \delta_{kl} \sum_m \delta_{lm}\delta_{jm} + \sum_k \delta_{ik}\delta_{jk} \sum_l \delta_{il}\delta_{jl} \sum_m \delta_{lm}\delta_{jm} \\
&\quad - \sum_k \delta_{ik} \sum_l \delta_{il} \sum_m \delta_{lm}\delta_{jm} - \sum_k \delta_{ik}\delta_{jk} \sum_l \delta_{kl} \sum_m \delta_{lm}\delta_{jm} \\
&= \delta_{ij} + \sum_k \delta_{ik}\delta_{jk}\delta_{ij}\delta_{ik} - \sum_k \delta_{ik}\delta_{ij}\delta_{ik} - \delta_{ij} \\
&= 0, \tag{532}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_{il}\delta_{km}(1 - \delta_{ik})\delta_{jk}\delta_{lm}(1 - \delta_{jl}) &= \sum_{klm} \delta_{il}\delta_{km}\delta_{jk}\delta_{lm} + \sum_{klm} \delta_{il}\delta_{km}\delta_{ik}\delta_{jk}\delta_{lm}\delta_{jl} \\
&\quad - \sum_{klm} \delta_{il}\delta_{km}\delta_{ik}\delta_{jk}\delta_{lm} - \sum_{klm} \delta_{il}\delta_{km}\delta_{jk}\delta_{lm}\delta_{jl} \\
&= \sum_k \delta_{jk} \sum_l \delta_{il} \sum_m \delta_{km}\delta_{lm} + \sum_k \delta_{ik}\delta_{jk} \sum_l \delta_{il}\delta_{jl} \sum_m \delta_{km}\delta_{lm} \\
&\quad - \sum_k \delta_{ik}\delta_{jk} \sum_l \delta_{il} \sum_m \delta_{km}\delta_{lm} - \sum_k \delta_{jk} \sum_l \delta_{il}\delta_{jl} \sum_m \delta_{km}\delta_{lm} \\
&= \delta_{ij} + \delta_{ij} - \delta_{ij} - \delta_{ij} \\
&= 0, \tag{533}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_{il}\delta_{km}(1-\delta_{ik})\delta_{jl}\delta_{km}(1-\delta_{jk}) &= \sum_{klm} \delta_{il}\delta_{km}\delta_{jl}\delta_{km} + \sum_{klm} \delta_{il}\delta_{km}\delta_{ik}\delta_{jl}\delta_{km}\delta_{jk} \\
&\quad - \sum_{klm} \delta_{il}\delta_{km}\delta_{ik}\delta_{jl}\delta_{km} - \sum_{klm} \delta_{il}\delta_{km}\delta_{jl}\delta_{km}\delta_{jk} \\
&= \sum_k \sum_l \delta_{il}\delta_{jl} \sum_m \delta_{km} + \sum_k \delta_{ik}\delta_{jk} \sum_l \delta_{il}\delta_{jl} \sum_m \delta_{km} \\
&\quad - \sum_k \delta_{ik} \sum_l \delta_{il}\delta_{jl} \sum_m \delta_{km} - \sum_k \delta_{jk} \sum_l \delta_{il}\delta_{jl} \sum_m \delta_{km} \\
&= d\delta_{ij} + \delta_{ij} - \delta_{ij} - \delta_{ij} \\
&= \delta_{ij}(d-1), \tag{534}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_{il}\delta_{km}(1-\delta_{ik})\delta_{jm}\delta_{kl}(1-\delta_{jk}) &= \sum_{klm} \delta_{il}\delta_{km}\delta_{jm}\delta_{kl} + \sum_{klm} \delta_{il}\delta_{km}\delta_{ik}\delta_{jm}\delta_{kl}\delta_{jk} \\
&\quad - \sum_{klm} \delta_{il}\delta_{km}\delta_{ik}\delta_{jm}\delta_{kl} - \sum_{klm} \delta_{il}\delta_{km}\delta_{jm}\delta_{kl}\delta_{jk} \\
&= \sum_k \sum_l \delta_{il}\delta_{kl} \sum_m \delta_{km}\delta_{jm} + \sum_k \delta_{ik}\delta_{jk} \sum_l \delta_{il}\delta_{kl} \sum_m \delta_{km}\delta_{jm} \\
&\quad - \sum_k \delta_{ik} \sum_l \delta_{il}\delta_{kl} \sum_m \delta_{km}\delta_{jm} - \sum_k \delta_{jk} \sum_l \delta_{il}\delta_{kl} \sum_m \delta_{km}\delta_{jm} \\
&= \sum_k \delta_{ik}\delta_{jk} - \delta_{ij} \\
&= 0, \tag{535}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_{im}\delta_{kl}(1-\delta_{ik})\delta_{jk}\delta_{lm}(1-\delta_{jl}) &= \sum_{klm} \delta_{im}\delta_{kl}\delta_{jk}\delta_{lm} + \sum_{klm} \delta_{im}\delta_{kl}\delta_{ik}\delta_{jk}\delta_{lm}\delta_{jl} \\
&\quad - \sum_{klm} \delta_{im}\delta_{kl}\delta_{ik}\delta_{jk}\delta_{lm} - \sum_{klm} \delta_{im}\delta_{kl}\delta_{jk}\delta_{lm}\delta_{jl} \\
&= \sum_k \delta_{jk} \sum_l \delta_{kl} \sum_m \delta_{im}\delta_{lm} + \sum_k \delta_{ik}\delta_{jk} \sum_l \delta_{kl}\delta_{jl} \sum_m \delta_{im}\delta_{lm} \\
&\quad - \sum_k \delta_{ik}\delta_{jk} \sum_l \delta_{kl} \sum_m \delta_{im}\delta_{lm} - \sum_k \delta_{jk} \sum_l \delta_{kl}\delta_{jl} \sum_m \delta_{im}\delta_{lm} \\
&= \delta_{ij} + \delta_{ij} - \delta_{ij} - \delta_{ij} \\
&= 0, \tag{536}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_{im}\delta_{kl}(1-\delta_{ik})\delta_{jl}\delta_{km}(1-\delta_{jk}) &= \sum_{klm} \delta_{im}\delta_{kl}\delta_{jl}\delta_{km} + \sum_{klm} \delta_{im}\delta_{kl}\delta_{ik}\delta_{jl}\delta_{km}\delta_{jk} \\
&\quad - \sum_{klm} \delta_{im}\delta_{kl}\delta_{ik}\delta_{jl}\delta_{km} - \sum_{klm} \delta_{im}\delta_{kl}\delta_{jl}\delta_{km}\delta_{jk} \\
&= \sum_k \sum_l \delta_{kl}\delta_{jl} \sum_m \delta_{im}\delta_{km} + \sum_k \delta_{ik}\delta_{jk} \sum_l \delta_{kl}\delta_{jl} \sum_m \delta_{im}\delta_{km} \\
&\quad - \sum_k \delta_{ik} \sum_l \delta_{kl}\delta_{jl} \sum_m \delta_{km} - \sum_k \delta_{jk} \sum_l \delta_{kl}\delta_{jl} \sum_m \delta_{im}\delta_{km} \\
&= \sum_k \delta_{ik} \sum_l \delta_{kl}\delta_{jl} + \delta_{ij} - \delta_{ij} - \delta_{ij} \\
&= \sum_k \delta_{ik}\delta_{jk} - \delta_{ij} \\
&= 0, \tag{537}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_{im}\delta_{kl}(1-\delta_{ik})\delta_{jm}\delta_{kl}(1-\delta_{jk}) &= \sum_{klm} \delta_{im}\delta_{kl}\delta_{jm}\delta_{kl} + \sum_{klm} \delta_{im}\delta_{kl}\delta_{ik}\delta_{jm}\delta_{kl}\delta_{jk} \\
&\quad - \sum_{klm} \delta_{im}\delta_{kl}\delta_{ik}\delta_{jm}\delta_{kl} - \sum_{klm} \delta_{im}\delta_{kl}\delta_{jm}\delta_{kl}\delta_{jk} \\
&= \sum_k \sum_l \delta_{kl} \sum_m \delta_{im}\delta_{jm} + \sum_k \delta_{ik}\delta_{jk} \sum_l \delta_{kl}\delta_{jk} \sum_m \delta_{im}\delta_{jm} \\
&\quad - \sum_k \delta_{ik} \sum_l \delta_{kl} \sum_m \delta_{im}\delta_{jm} - \sum_k \delta_{jk} \sum_l \delta_{kl} \sum_m \delta_{im}\delta_{jm} \\
&= d\delta_{ij} + \delta_{ij} - \delta_{ij} - \delta_{ij} \\
&= \delta_{ij}(d-1). \tag{538}
\end{aligned}$$

Utilisant les relations (526) à (538) dans (525) il vient

$$\begin{aligned}
M_{iklm}^a M_{jklm}^{a'} &= b^a b^{a'} \delta_{ij} + \frac{b^a b^{a'}}{9} 3(d-1)\delta_{ij} \\
&= \delta_{ij} b^a b^{a'} \left(1 + \frac{d-1}{3}\right) \\
&= \frac{d+2}{3} b^a b^{a'} \delta_{ij}, \tag{539}
\end{aligned}$$

ce qui est bien le résultat cherché. ■

Un corollaire immédiat du lemme 3.10 est :

$$M_{klmn}^a M_{klmn}^{a'} = \frac{d(d+2)}{3} b^a b^{a'}. \tag{540}$$

### 3.6.3 Calcul des intégrales

#### 3.6.3.1 Première intégrale

On a :

$$\int K_2^{C^2, c_{12}^2} \stackrel{(512)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{c}_{12} |\mathbf{c}_{12}| e^{-c_{12}^2/2} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{C} e^{-2C^2} K_2^{C^2, c_{12}^2}, \tag{541}$$

ce qui en utilisant les résultats de la section 3.6.2, les notations des deux lemmes 3.6 (page 51) et 3.7 (page 52) ainsi que de l'Eq. (519), on trouve après simplifications

$$\begin{aligned}
\int K_2^{C^2, c_{12}^2} &= \delta_{ij} \left[ \frac{1}{4} M^{1/2}[1]I^2[0] + I^{1/2}[1]M^2[0] - \frac{1}{d} I^{1/2}[1]I^2[2] - \frac{1}{4d} I^{1/2}[3]I^2[0] \right] \\
&\quad + a_2 \delta_{ij} \left[ -\frac{d+2}{8} M^{1/2}[1]I^2[2] + \frac{1}{8} M^{1/2}[1]I^2[4] - \frac{d+2}{32} M^{1/2}[3]I^2[0] \right] \\
&\quad + \frac{1}{16} M^{1/2}[3]I^2[2] + \frac{1}{128} M^{1/2}[5]I^2[0] - \frac{d+2}{2} I^{1/2}[1]M^2[2] + \frac{1}{2} I^{1/2}[1]M^2[4] \\
&\quad - \frac{1}{4} I^{1/2}[3]M^2[0] + \frac{1}{4} I^{1/2}[3]M^2[2] + \frac{1}{32} I^{1/2}[5]M^2[0] + \frac{d(d+2)}{16} M^{1/2}[1]I^2[0] \\
&\quad + \frac{d(d+2)}{4} I^{1/2}[1]M^2[0] - \frac{d}{8} I^{1/2}[3]M^2[0] - \frac{d+2}{4} I^{1/2}[1]I^2[2] + \frac{d+2}{2d} I^{1/2}[1]I^2[4] \\
&\quad - \frac{d+2}{16} I^{1/2}[3]I^2[0] + \frac{d+2}{4d} I^{1/2}[3]I^2[2] + \frac{d+2}{32d} I^{1/2}[5]I^2[0] - \frac{1}{2d} I^{1/2}[1]I^2[6] \\
&\quad - \frac{3}{8d} I^{1/2}[3]I^2[4] - \frac{3}{32d} I^{1/2}[5]I^2[2] - \frac{1}{128d} I^{1/2}[7]I^2[0] - \frac{1}{2} M^{1/2}[1]M^2[2] \\
&\quad - \frac{1}{8} M^{1/2}[3]M^2[0] + \frac{d+2}{24} b^{1/2}[1]M^2[0] + \frac{d+2}{6} M^{1/2}[1]b^2[0] \Big]. \tag{542}
\end{aligned}$$

**3.6.3.2 Seconde intégrale** On a :

$$\int (C^2 + c_{12}^2/4) K_2^{C^2, c_{12}^2} \stackrel{(512)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{c}_{12} |\mathbf{c}_{12}| e^{-c_{12}^2/2} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{C} e^{-2C^2} (C^2 + c_{12}^2/4) K_2^{C^2, c_{12}^2}. \quad (543)$$

Cette intégrale a essentiellement déjà été calculée. En effet, il suffit de reprendre l'expression (542) dans laquelle on incrémente de deux unités le compteur en seconde position dans les produits  $IM$ ,  $MI$ ,  $II$ ,  $MM$ ,  $bM$ , et  $Mb$ , expression à laquelle on ajoute encore 1/4 fois l'Eq. (542) dans laquelle on incrémente de deux unités le premier compteur.

**3.6.3.3 Troisième intégrale** On a :

$$\int (\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) K_2^{(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})} \stackrel{(512)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{c}_{12} |\mathbf{c}_{12}| e^{-c_{12}^2/2} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{C} e^{-2C^2} (\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) K_2^{(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})}. \quad (544)$$

Utilisant l'Eq. (515), on obtient ainsi après simplifications :

$$\begin{aligned} \int (\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12}) K_2^{(\mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_{12})} &= \delta_{ij} \frac{d-1}{d} M^{1/2}[1] M^2[0] \\ &+ a_2 \delta_{ij} \left[ -\frac{d(d+2)}{2} M^{1/2}[1] M^2[2] + M^{1/2}[1] M^2[4] \right. \\ &- \frac{d(d+2)}{8} M^{1/2}[3] M^2[0] + \frac{1}{2} M^{1/2}[3] M^2[2] + \frac{1}{16} M^{1/2}[5] M^2[0] \\ &- \frac{5(d+2)}{12} b^{1/2}[1] M^2[2] - \frac{5(d+2)}{48} b^{1/2}[3] M^2[0] \\ &\left. + \frac{5d(d+2)^2}{24} b^{1/2}[1] M^2[0] \right]. \end{aligned} \quad (545)$$

**3.6.3.4 Quatrième intégrale** On a :

$$\int C_q K_1^{C_q} \stackrel{(512)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{c}_{12} |\mathbf{c}_{12}| e^{-c_{12}^2/2} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{C} e^{-2C^2} C_q K_2^{C_q}, \quad (546)$$

Utilisant l'Eq. (517) on trouve après simplifications :

$$\begin{aligned} \int C_q K_1^{C_q} &= \delta_{iq} \left[ -\frac{d+2}{2} I^{1/2}[1] M^2[0] + I^{1/2}[1] M^2[2] + \frac{1}{4} I^{1/2}[3] M^2[0] + \frac{1}{2} M^{1/2}[1] M^2[0] \right] \\ &+ a_2 \delta_{iq} \left[ \frac{2+3d+d^2}{2} I^{1/2}[1] M^2[2] - \frac{3(d+2)}{4} I^{1/2}[1] M^2[4] + \frac{1}{2} I^{1/2}[1] M^2[6] \right. \\ &+ \frac{2+3d+d^2}{8} I^{1/2}[3] M^2[0] - \frac{3(d+2)}{8} I^{1/2}[3] M^2[2] + \frac{3}{8} I^{1/2}[3] M^2[4] \\ &- \frac{3(d+2)}{64} I^{1/2}[5] M^2[0] + \frac{3}{32} I^{1/2}[5] M^2[2] + \frac{1}{128} I^{1/2}[7] M^2[0] \\ &- d \frac{4(d+1)+d^2}{8} I^{1/2}[1] M^2[0] - \frac{1}{4} M^{1/2}[1] M^2[4] - \frac{1}{8} M^{1/2}[3] M^2[2] \\ &- \frac{1}{64} M^{1/2}[5] M^2[0] - \frac{d}{8} (2+3d+d^2) M^{1/2}[1] M^2[0] + \frac{d(d+2)}{4} M^{1/2}[1] M^2[2] \\ &+ \frac{d(d+2)}{16} M^{1/2}[3] M^2[0] + \frac{d+2}{3} \frac{-2+3d+2d^2}{4} M^{1/2}[1] b^2[0] - \frac{d+2}{6} M^{1/2}[1] b^2[2] \\ &\left. - \frac{d+2}{24} M^{1/2}[3] b^2[0] + \frac{d+2}{12} b^{1/2}[1] b^2[0] \right]. \end{aligned} \quad (547)$$

### 3.6.3.5 Cinquième intégrale On a :

$$\int c_{12q} K_1^{c_{12q}} \stackrel{(512)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{c}_{12} |\mathbf{c}_{12}| e^{-c_{12}^2/2} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{C} e^{-2C^2} c_{12q} K_1^{c_{12q}}, \quad (548)$$

Utilisant l'Eq. (518) on trouve après simplifications :

$$\begin{aligned} \int C_q K_1^{C_q} &= \delta_{iq} \left[ -\frac{d+2}{4} M^{1/2}[1] I^2[0] + \frac{1}{2} M^{1/2}[1] I^2[2] + \frac{1}{8} M^{1/2}[3] I^2[0] + M^{1/2}[1] M^2[0] \right] \\ &+ a_2 \delta_{iq} \left[ \frac{2+3d+d^2}{4} M^{1/2}[1] I^2[2] - \frac{3(d+2)}{8} M^{1/2}[1] I^2[4] + \frac{1}{4} M^{1/2}[1] I^2[6] \right. \\ &+ \frac{2+3d+d^2}{16} M^{1/2}[3] I^2[0] - \frac{3(d+2)}{16} M^{1/2}[3] I^2[0] + \frac{3}{16} M^{1/2}[3] I^2[4] \\ &- \frac{3(d+2)}{128} M^{1/2}[5] I^2[0] + \frac{3}{64} M^{1/2}[5] I^2[2] + \frac{1}{256} M^{1/2}[7] I^2[0] \\ &- d \frac{4(d+1)+d^2}{16} M^{1/2}[1] I^2[0] - \frac{1}{2} M^{1/2}[1] M^2[4] - \frac{1}{4} M^{1/2}[3] M^2[2] \\ &- \frac{1}{32} M^{1/2}[5] M^2[0] - \frac{d}{4} (2+3d+d^2) M^{1/2}[1] M^2[0] + \frac{d(d+2)}{2} M^{1/2}[1] M^2[2] \\ &+ \frac{d(d+2)}{8} M^{1/2}[3] M^2[0] + \frac{d+2}{3} \frac{-2+3d+2d^2}{8} b^{1/2}[1] M^2[0] - \frac{d+2}{12} b^{1/2}[1] M^2[2] \\ &\left. - \frac{d+2}{48} b^{1/2}[3] M^2[0] + \frac{d+2}{6} b^{1/2}[1] b^2[0] \right]. \quad (549) \end{aligned}$$

### 3.6.4 Taux de déclin $\xi_n^{(1)}$ , $\xi_{u_i}^{(1)}$ , $\xi_T^{(1)}$

On développe et simplifie les expressions (542) à (549) à l'aide d'un logiciel de calcul symbolique. Combinant les expressions ainsi trouvées avec les Eqs. (502) à (511) on trouve :

- $(A, B) = (1, 1)$  :

$$I_1^{1,1} = 0, \quad (550)$$

$$I_2^{1,1} = 0. \quad (551)$$

- $(A, B) = (V_2^2, 1)$  :

$$I_1^{V_2^2,1} = 0, \quad (552)$$

$$I_2^{V_2^2,1} = v_T^2 \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\Gamma(d/2)} \frac{\pi^d}{\sqrt{2}} \frac{d+1}{2d} \left[ -\frac{d-1}{d} - a_2 \frac{-70-d+26d^2+6d^3}{16} \right]. \quad (553)$$

- $(A, B) = (1, V_1^2)$  :

$$I_1^{1,V_1^2} = 0, \quad (554)$$

$$I_2^{1,V_1^2} = v_T^2 \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\Gamma(d/2)} \frac{\pi^d}{\sqrt{2}} \frac{d+1}{2d} \left[ \frac{d-1}{d} + a_2 \frac{-70-d+26d^2+6d^3}{16} \right] = -I_2^{V_2^2,1}. \quad (555)$$

- $(A, B) = (V_{2i}, 1)$  : utilisant  $c_2 = C - c_{12}/2$  il vient :

$$I_1^{V_{2i},1} = v_T \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\Gamma(d/2)} \frac{\pi^d}{\sqrt{2}8d} \left[ 1 + a_2 \frac{23-24d-76d^2-4d^3+12d^4}{32} \right], \quad (556)$$

$$I_2^{V_{2i},1} = 0. \quad (557)$$

- $(A, B) = (1, V_{1i})$  : utilisant  $c_2 = C - c_{12}/2$  il vient :

$$I_1^{1, V_{1i}} = v_T \frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{\Gamma(d/2)} \frac{\pi^d}{\sqrt{28d}} \left[ 3 + 2d + a_2 \frac{-195 - 178d - 140d^2 - 180d^3 + 44d^4}{32} \right], \quad (558)$$

$$I_2^{1, V_{1i}} = 0. \quad (559)$$

On obtient ainsi tous les  $\omega[Af^{(0)}, Bf^{(1)}]$  par insertion des relations (550) à (559) dans (492). Les taux de déclin sont ensuite fournis par les Eqs. (476) à (478). Ceci donne :

$$\begin{aligned} \xi_n^{(1)} &= \frac{2}{n} \omega[f^{(0)}, f^{(1)}] \\ &= -\frac{2}{n} \frac{\Gamma(d/2)}{\left(\frac{d+1}{2}\right)} n \frac{d+2}{4\pi^d} \left[ \frac{d}{\sqrt{2}(d-1)} v_T \left( \kappa^* \frac{1}{T} \nabla_i T + \mu^* \frac{1}{n} \nabla_i n \right) \underbrace{I_1^{1,1}}_{=0} + \sqrt{2}\eta^* \nabla_j u_i \underbrace{I_2^{1,1}}_{=0} \right] \\ &= 0. \end{aligned} \quad (560)$$

De même pour le taux de déclin de température :

$$\begin{aligned} \xi_T^{(1)} &= -\underbrace{\xi_n^{(1)}}_{\stackrel{(560)}{=}0} + \frac{m}{nk_B T d} \omega[f^{(0)}, V^2 f^{(1)}] + \frac{m}{nk_B T d} \omega[V^2 f^{(0)}, f^{(1)}] \\ &= -\frac{m}{nk_B T d} \frac{\Gamma(d/2)}{\left(\frac{d+1}{2}\right)} n \frac{d+2}{4\pi^d} \left[ \frac{d}{\sqrt{2}(d-1)} v_T \left( \kappa^* \frac{1}{T} \nabla_i T + \mu^* \frac{1}{n} \nabla_i n \right) \underbrace{(I_1^{1, V_1^2} + I_1^{V_2^2, 1})}_{\substack{=I_1^{1, V_1^2} - I_1^{1, V_1^2} \\ =0}} \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{2}\eta^* \nabla_j u_i \underbrace{(I_2^{1, V_1^2} + I_2^{V_2^2, 1})}_{\substack{=0 \\ =0}} \right] \\ &= 0. \end{aligned} \quad (561)$$

Finalement, le taux de déclin de l'impulsion est :

$$\begin{aligned} \xi_{u_i}^{(1)} &= \frac{1}{nv_T} \omega[f^{(0)}, V_i f^{(1)}] + \frac{1}{nv_T} \omega[V_i f^{(0)}, f^{(1)}] \\ &= -\frac{1}{nv_T} \frac{\Gamma(d/2)}{\left(\frac{d+1}{2}\right)} n \frac{d+2}{4\pi^d} \left[ \frac{d}{\sqrt{2}(d-1)} v_T \left( \kappa^* \frac{1}{T} \nabla_i T + \mu^* \frac{1}{n} \nabla_i n \right) (I_1^{1, V_{1i}} + I_1^{V_{2i}, 1}) \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{2}\eta^* \nabla_j u_i \underbrace{(I_2^{1, V_{1i}} + I_2^{V_{2i}, 1})}_{\substack{=0 \\ =0}} \right] \\ &\quad \vdots \\ &= -v_T \left( \kappa^* \frac{1}{T} \nabla_i T + \mu^* \frac{1}{n} \nabla_i n \right) \frac{(d+2)^2}{32(d-1)} \left[ 1 + a_2 \frac{-86 - 101d + 32d^2 + 88d^3 + 28d^4}{32(d+2)} \right]. \end{aligned} \quad (562)$$

Notons encore l'isotropie du taux de déclin d'impulsion  $\xi_{u_i}^{(1)}$ . En résumé :

$$\begin{aligned} \xi_n^{(1)} &= 0, \\ \xi_{u_i}^{(1)} &= -v_T \left( \kappa^* \frac{1}{T} \nabla_i T + \mu^* \frac{1}{n} \nabla_i n \right) \frac{(d+2)^2}{32(d-1)} \left[ 1 + a_2 \frac{-86 - 101d + 32d^2 + 88d^3 + 28d^4}{32(d+2)} \right], \\ \xi_T^{(1)} &= 0. \end{aligned} \quad (563)$$

Le résumé de la Sect. 3.5 (page 72) ainsi que les Eqs. (563) forment un système fermé pour les champs hydrodynamiques à l'ordre Navier-Stokes.

## 4 Stabilité hydrodynamique

Nous avons déjà obtenu un ensemble de relations fermées pour les champs hydrodynamiques. Nous allons ici étudier la stabilité linéaire des solutions autour de l'état de refroidissement homogène (HCS : "Homogeneous Cooling State"). Des simulations de dynamique moléculaire [16, 17, 18] ainsi que de Monte-Carlo de l'équation de Boltzmann [19] ont montré que la solution HCS est instable pour le gaz granulaire : il y a formation spontanée de clusters de haute densité. L'analyse de stabilité hydrodynamique du gaz de sphères dur montre que la solution HCS est stable [2]. Qu'en est-il si on y ajoute la dynamique annihilante? Notre étude doit permettre de répondre à cette question.

### 4.1 Solution homogène

La solution homogène (à l'ordre zéro) de la fonction de distribution  $f^{(0)}$  est connue [15]. Ceci permet de déterminer les champ hydrodynamiques à cet ordre. On avait trouvé

$$\partial_t n = -pn\xi_n^{(0)}, \quad (564)$$

$$\partial_t u_i = -pv_T\xi_{u_i}^{(1)}, \quad (565)$$

$$\partial_t T = -pT\xi_T^{(0)}, \quad (566)$$

avec

$$\xi_n^{(0)} = \xi_n^{(0)*}\nu_0, \quad \xi_n^{(0)*} = \frac{d+2}{4} \left(1 - a_2 \frac{1}{16}\right), \quad (567)$$

$$\xi_T^{(0)} = \xi_T^{(0)*}\nu_0, \quad \xi_T^{(0)*} = \frac{d+2}{8} \left(2d - 1 + a_2 \frac{6d+13}{16}\right), \quad (568)$$

$$\nu_0 = \frac{p^{(0)}}{\eta_0}, \quad p^{(0)} = nk_B T, \quad \eta_0 = \frac{d+2}{8} \frac{\Gamma(d/2)}{\pi^{(d-1)/2}} \frac{\sqrt{mk_B T}}{\sigma^{d-1}}, \quad (569)$$

$$\nu_0 = nk_B T \frac{8}{d+2} \frac{\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma(d/2)} \frac{\sigma^{d-1}}{\sqrt{mk_B T}} \doteq anT^{1/2}. \quad (570)$$

La résolution du système d'Eqs. (564) à (566) n'est plus aussi directe que dans le cas du gaz inélastique. En effet, la densité n'est à présent plus conservée, et sa décroissance est liée à celle de la température par les taux de déclin. On a donc un système d'équations différentielles non linéaires couplées du premier ordre. Pour le gaz inélastique, on avait  $\partial_t T = -T\xi_T^{(0)}$ , où  $\xi_T^{(0)} \sim nT^{1/2}$  [2]. La solution était  $T(t) = T_0(1+t/t_0)^{-2}$ ,  $t_0 = \xi_T^{(0)}(0)/2$ . Dans notre cas, on a  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0$ , et les Eqs. (564) et (566) utilisant (570) deviennent

$$\partial_t n = -n^2 T^{1/2} a_n, \quad (571)$$

$$\partial_t T = -nT^{3/2} a_T, \quad (572)$$

$$(573)$$

avec

$$a_n = \xi_n^{(0)*} pa, \quad (574)$$

$$a_T = \xi_T^{(0)*} pa. \quad (575)$$

On peut résoudre ce système en devinant, par analogie à la solution inélastique, une solution de la forme

$$n(t) = c_1(1+c_2t)^{\gamma_1}, \quad \partial_t n = c_1\gamma_1 c_2(1+c_2t)^{\gamma_1-1}, \quad (576)$$

$$T(t) = c_3(1+c_4t)^{\gamma_2}, \quad \partial_t T = c_3\gamma_2 c_4(1+c_4t)^{\gamma_2-1}, \quad (577)$$

avec  $\gamma_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , que l'on insère dans les Eqs. (571) et (572) pour obtenir

$$c_1 \gamma_1 c_2 (1 + c_2 t)^{\gamma_1 - 1} = -c_1^2 (1 + c_2 t)^{2\gamma_1} \sqrt{c_3} (1 + c_4 t)^{\gamma_2/2} a_n, \quad (578)$$

$$c_3 \gamma_2 c_4 (1 + c_4 t)^{\gamma_2 - 1} = -c_1 (1 + c_2 t)^{\gamma_1} c_3^{3/2} (1 + c_4 t)^{3\gamma_2/2} a_T. \quad (579)$$

Pour qu'une solution de la forme (576) et (577) existe, il faudrait que les exposants satisfassent  $\gamma_1 - 1 = 2\gamma_1$ ,  $\gamma_2 = 0$ ,  $\gamma_2 - 1 = 3\gamma_2/2$ , et  $\gamma_1 = 0$  (ce qui absurde), ou que  $c_2 = c_4 \doteq c$ . Dans ce dernier cas on obtient

$$c_1 c \gamma_1 (1 + ct)^{\gamma_1 - 1} = -c_1^2 (1 + ct)^{2\gamma_1} \sqrt{c_3} (1 + ct)^{\gamma_2/2} a_n, \quad (580)$$

$$c_3 c \gamma_2 (1 + ct)^{\gamma_2 - 1} = -c_1 (1 + ct)^{\gamma_1} c_3^{3/2} (1 + ct)^{3\gamma_2/2} a_T. \quad (581)$$

Les exposants doivent satisfaire

$$\gamma_1 - 1 = 2\gamma_1 + \gamma_2/2 \implies \gamma_1 + \gamma_2/2 = -1, \quad (582)$$

$$\gamma_2 - 1 = \gamma_1 + 3\gamma_2/2 \implies \gamma_1 + \gamma_2/2 = -1, \quad (583)$$

d'où

$$\gamma_1 = -1 - \gamma_2/2. \quad (584)$$

Les coefficients doivent satisfaire

$$c_1 c \gamma_1 = -c_1^2 \sqrt{c_3} a_n \implies \gamma_1 = -a_n \frac{c_1}{c} \sqrt{c_3}, \quad (585)$$

$$c_3 c \gamma_2 = -c_1 c_3^{3/2} a_T \implies \gamma_2 = -a_T \frac{c_1}{c} \sqrt{c_3}. \quad (586)$$

On résous ces équations pour  $\gamma_2$  et  $c$  :

$$\left. \begin{aligned} -1 - \gamma_2/2 &= -a_n \frac{c_1}{c} \sqrt{c_3} \\ \gamma_2 &= -a_T \frac{c_1}{c} \sqrt{c_3} \end{aligned} \right\} \implies c = c_1 \sqrt{c_3} (a_n + a_T/2). \quad (587)$$

Donc

$$\gamma_2 = -a_T \frac{c_1 \sqrt{c_3}}{c_1 \sqrt{c_3} (a_n + a_T/2)} = -\frac{2a_T}{2a_n + a_T}. \quad (588)$$

Utilisant l'Eq. (584) :

$$\gamma_1 = -1 - \gamma_2/2 = \frac{-2a_n - a_T}{2a_n + a_T} + \frac{a_T}{2a_n + a_T} = -\frac{2a_n}{2a_n + a_T}. \quad (589)$$

Les constantes  $c_1$  et  $c_3$  se trouvent à l'aide des conditions initiales :

$$n(0) = n_0 \implies c_1 = n_0, \quad (590)$$

$$T(0) = T_0 \implies c_3 = T_0. \quad (591)$$

Or on sait aussi que

$$\xi_n^{(0)} = \xi_n^{(0)*} p a n T^{1/2}, \quad \xi_n^{(0)}(0) = \xi_n^{(0)*} p a n_0 T_0^{1/2} = a_n n_0 T_0^{1/2}, \quad (592)$$

$$\xi_T^{(0)} = \xi_T^{(0)*} p a n T^{1/2}, \quad \xi_T^{(0)}(0) = \xi_T^{(0)*} p a n_0 T_0^{1/2} = a_T n_0 T_0^{1/2}. \quad (593)$$

Ainsi

$$C = n_0 T_0^{1/2} a_n + n_0 T_0^{1/2} a_T/2 = p \left[ \xi_n^{(0)}(0) + \xi_T^{(0)}/2 \right] \doteq p t_0^{-1}. \quad (594)$$

En résumé, on a

$$\boxed{\begin{aligned} n(t) &= n_0 \left(1 + p \frac{t}{t_0}\right)^{\gamma_n}, & \gamma_n &= -\xi_n^{(0)}(0)t_0, & t_0^{-1} &= \xi_n^{(0)}(0) + \xi_T^{(0)}/2 \\ T(t) &= T_0 \left(1 + p \frac{t}{t_0}\right)^{\gamma_T}, & \gamma_T &= -\xi_T^{(0)}(0)t_0. \end{aligned}} \quad (595)$$

Les exposants de déclin sont indépendants de la probabilité d'annihilation. Dans la limite  $p \rightarrow 0$ , on a bien  $n(t) = n_0$  et  $T(t) = T_0$ ,  $\forall t$ . Les grandeurs  $t_0$ ,  $\xi_n^{(0)}$ , et  $\xi_T^{(0)}$  peuvent être déterminées au premier ordre  $a_2$  du développement de Sonine (pour mémoire on a établi précédemment les expressions de  $\xi_n^{(0)*}$  et  $\xi_T^{(0)*}$  à cet ordre).

## 4.2 Nouvelles variables et transformée de Fourier

La linéarisation des équations autour de l'état de refroidissement homogène engendre un système d'équations différentielles aux dérivées partielles dont les coefficients sont indépendants de l'espace, mais dépendent du temps. Cette dépendance temporelle peut être éliminée par un changement de variables spatiales et temporelles, ainsi qu'un changement d'échelles des champs hydrodynamiques. Soit  $y \in \{n, u, T\}$  le champ considéré,  $y_H(t)$  la solution correspondante pour l'état homogène,  $\delta y(\mathbf{r}, t)$  la déviation par rapport à l'état homogène (supposée petite), alors :

$$\delta y(\mathbf{r}, t) = y(\mathbf{r}, t) - y_H(t). \quad (596)$$

On va utiliser les nouveaux champs hydrodynamiques adimensionalisés en représentation de Fourier :

$$\delta y_{\mathbf{k}}(\tau) = \int d\mathbf{l} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{l}} \delta y(\mathbf{l}, \tau), \quad (597)$$

où  $\mathbf{l}$  et  $\tau$  sont les variables sans dimension d'espace et de temps définies par

$$\mathbf{l} = \frac{\nu_{0H}(t)}{2} \sqrt{\frac{m}{k_B T_H(t)}} \mathbf{r}, \quad (598)$$

$$\tau = \frac{1}{2} \int_0^t ds \nu_{0H}(s), \quad (599)$$

$$(600)$$

donc

$$\frac{\partial}{\partial r_i} = \frac{\partial l_j}{\partial r_i} \frac{\partial}{\partial l_j} = \left( \frac{\partial}{\partial r_i} \frac{\nu_{0H}(t)}{2} \sqrt{\frac{m}{k_B T_H(t)}} \mathbf{r} \right) \frac{\partial}{\partial l_j} = \frac{\nu_{0H}(t)}{2} \sqrt{\frac{m}{k_B T_H(t)}} \frac{\partial}{\partial l_j}, \quad (601)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \tau} = \left( \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \int_0^t ds \nu_{0H}(s) \right) \frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \nu_{0H}(t) \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad (602)$$

où l'indice  $H$  signifie que la grandeur est évaluée dans l'état homogène, c'est-à-dire avec la solution à l'ordre zéro trouvée précédemment. On définit ainsi les champs hydrodynamiques suivants :

$$\rho_{\mathbf{k}}(\tau) = \frac{\delta n_{\mathbf{k}}(\tau)}{n_H(\tau)}, \quad (603)$$

$$\mathbf{w}_{\mathbf{k}}(\tau) = \sqrt{\frac{m}{k_B T_H(\tau)}} \delta \mathbf{u}_{\mathbf{k}}(\tau), \quad (604)$$

$$\theta_{\mathbf{k}}(\tau) = \frac{\delta T_{\mathbf{k}}(\tau)}{T_H(\tau)}. \quad (605)$$

### 4.3 Linéarisation

#### 4.3.1 Densité

On a

$$\begin{aligned}
& \partial_t n + \nabla_i (n u_i) = -p n \xi_n^{(0)} \\
\Rightarrow & \partial_t (\delta n + n_H) + \nabla_i [(\delta n + n_H)(\delta u_i + \underbrace{u_{i0}}_{=0})] = -p(\delta n + n_H) \xi_n^{(0)} \\
\Rightarrow & \partial_t n + \partial_t n_H + \nabla_i (\underbrace{\delta n \delta u_i + n_H \delta u_i}_{=\mathcal{O}(\delta^2)}) = -p \delta n \xi_n^{(0)} - p n_H \xi_n^{(0)}, \quad \xi_n^{(0)} = \nu_0 \xi_n^{(0)*} \\
\Rightarrow & \partial_t \delta n + \underbrace{\partial_t n}_{=-p n_H \xi_n^{(0)}} + n_H \nabla_j \delta u_j = -p \delta n \nu_0 \xi_n^{(0)*} - p n_H \nu_0 \xi_n^{(0)*}. \tag{606} \\
& \quad \quad \quad = -p n_H \nu_0 \xi_n^{(0)*}
\end{aligned}$$

Par intégration sur  $\mathbf{l}$  avec poids  $\exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{l})$  il vient

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\partial_t \int d\mathbf{l} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{l}} \delta n - p n_H \nu_0 \xi_n^{(0)*}}_{=\delta n_{\mathbf{k}}(\tau)} \int d\mathbf{l} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{l}} + n_H \int d\mathbf{l} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{l}} \nabla_j \delta u_j \\
& \quad \quad \quad = -p \nu_0 \xi_n^{(0)*} \underbrace{\int d\mathbf{l} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{l}} \delta n - p n_H \xi_n^{(0)*}}_{=\delta n_{\mathbf{k}}(\tau)} \int d\mathbf{l} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{l}} \nu_0 \\
\Rightarrow & \frac{1}{2} \nu_0 \partial_\tau \delta n_{\mathbf{k}}(\tau) - p n_H \nu_0 \xi_n^{(0)*} \int d\mathbf{l} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{l}} + n_H \frac{1}{2} \nu_0 \sqrt{\frac{m}{k_B T_H}} \underbrace{\int d\mathbf{l} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{l}} \nabla_{l_j} \delta u_j}_{\stackrel{\text{parties}}{=} i k_j \int d\mathbf{l} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{l}} \delta u_j} \\
& \quad \quad \quad = -p \nu_0 \xi_n^{(0)*} \delta n_{\mathbf{k}}(\tau) - p n_H \xi_n^{(0)*} \int d\mathbf{l} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{l}} \nu_0 \\
\Rightarrow & \partial_\tau \delta n_{\mathbf{k}}(\tau) - p n_H 2 \xi_n^{(0)*} \int d\mathbf{l} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{l}} + n_H i k_j \underbrace{\sqrt{\frac{m}{k_B T_H}} \delta u_{\mathbf{k}j}(\tau)}_{=w_{\mathbf{k}j}(\tau)} \\
& \quad \quad \quad = -2p \xi_n^{(0)*} \delta n_{\mathbf{k}}(\tau) - 2p n_H \frac{\xi_n^{(0)*}}{\nu_0} \int d\mathbf{l} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{l}} \nu_0 \\
\Rightarrow & \partial_\tau \delta n_{\mathbf{k}}(\tau) - p n_H 2 \xi_n^{(0)*} \int d\mathbf{l} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{l}} + i n_H \underbrace{\mathbf{k} \cdot \mathbf{w}_{\mathbf{k}}(\tau)}_{=k w_{\mathbf{k}\parallel}(\tau)} \\
& \quad \quad \quad = -2p \xi_n^{(0)*} \delta n_{\mathbf{k}}(\tau) - 2p n_H \frac{\xi_n^{(0)*}}{\nu_0} \int d\mathbf{l} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{l}} \nu_0 \\
\Rightarrow & \frac{1}{n_H} \partial_\tau n_{\mathbf{k}}(\tau) - p 2 \xi_n^{(0)*} \int d\mathbf{l} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{l}} + i k w_{\mathbf{k}\parallel}(\tau) \\
& \quad \quad \quad = -2p \xi_n^{(0)*} \underbrace{\frac{\delta n_{\mathbf{k}}(\tau)}{n_H}}_{=\rho_{\mathbf{k}}(\tau)} - \frac{2p \xi_n^{(0)*}}{\nu_0} \int d\mathbf{l} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{l}} \nu_0. \tag{607}
\end{aligned}$$

Or en constatant que

$$\begin{aligned}
\partial_\tau \rho_{\mathbf{k}}(\tau) &= \frac{1}{n_H} \partial_\tau n_{\mathbf{k}}(\tau) + n_{\mathbf{k}}(\tau) \left( -\frac{1}{n_H^2} \right) \partial_\tau n_H \\
&= \frac{1}{n_H} \partial_\tau n_{\mathbf{k}}(\tau) - \rho_{\mathbf{k}}(\tau) \frac{1}{n_H} \frac{2}{\nu_{0H}} \partial_t n_H(t) \\
&= \frac{1}{n_H} \partial_\tau n_{\mathbf{k}}(\tau) - \rho_{\mathbf{k}}(\tau) \frac{1}{n_H} \frac{2}{\nu_{0H}} \underbrace{\left[ -p n_H \xi_n^{(0)} \right]}_{= -p n_H \nu_{0H} \xi_n^{(0)*}} \\
&= \frac{1}{n_H} \partial_\tau n_{\mathbf{k}}(\tau) + \rho_{\mathbf{k}}(\tau) 2p \xi_n^{(0)*}, \tag{608}
\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{1}{n_H} \partial_\tau n_{\mathbf{k}}(\tau) = \partial_\tau \rho_{\mathbf{k}}(\tau) - 2p \rho_{\mathbf{k}}(\tau) \xi_n^{(0)*}. \tag{609}$$

Insérant l'Eq. (609) dans (607) il vient

$$\partial_\tau \rho_{\mathbf{k}}(\tau) - 2p \xi_n^{(0)*} \int d\mathbf{l} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{l}} + ikw_{\mathbf{k}\parallel} = -\frac{2p \xi_n^{(0)*}}{\nu_{0H}} \int d\mathbf{l} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{l}} \nu_0. \tag{610}$$

Or :

$$\begin{aligned}
-\frac{2p \xi_n^{(0)*}}{\nu_{0H}} \int d\mathbf{l} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{l}} \nu_0 &= -\frac{2p \xi_n^{(0)*}}{\nu_{0H}} \int d\mathbf{l} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{l}} \underbrace{\left[ nk_B T \frac{8}{d+2} \frac{\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma(d/2)} \frac{\sigma^{d-1}}{\sqrt{mk_B T}} \right]}_{\doteq an T^{1/2}} \\
&= -\frac{2p \xi_n^{(0)*}}{\nu_{0H}} \underbrace{an_H T_H^{1/2}}_{=\nu_{0H}} \frac{1}{n_H T_H^{1/2}} \int d\mathbf{l} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{l}} (\delta n + n_H) (\delta T + T_H)^{1/2} \\
&= -2p \xi_n^{(0)*} \frac{1}{n_H T_H^{1/2}} \int d\mathbf{l} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{l}} n_H T_H^{1/2} \left( \frac{\delta n}{n_H} + 1 \right) \underbrace{\left( \frac{\delta T}{T_H} + 1 \right)^{1/2}}_{= 1 + \frac{1}{2} \frac{\delta T}{T_H} + \mathcal{O}(\delta^2)} \\
&= -2p \xi_n^{(0)*} \int d\mathbf{l} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{l}} \left( 1 + \frac{\delta n}{n_H} + \frac{1}{2} \frac{\delta T}{T_H} \right) \\
&= -2p \xi_n^{(0)*} \int d\mathbf{l} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{l}} - 2p \xi_n^{(0)*} \rho_{\mathbf{k}}(\tau) - p \xi_n^{(0)*} \theta_{\mathbf{k}}(\tau). \tag{611}
\end{aligned}$$

Insérant l'Eq. (611) dans (610) il vient

$$\partial_\tau \rho_{\mathbf{k}}(\tau) - 2p \xi_n^{(0)*} \int d\mathbf{l} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{l}} + ikw_{\mathbf{k}\parallel} = -2p \xi_n^{(0)*} \int d\mathbf{l} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{l}} - 2p \xi_n^{(0)*} \rho_{\mathbf{k}}(\tau) - p \xi_n^{(0)*} \theta_{\mathbf{k}}(\tau), \tag{612}$$

d'où

$$\boxed{\left[ \partial_\tau + 2p \xi_n^{(0)*} \right] \rho_{\mathbf{k}}(\tau) + p \xi_n^{(0)*} \theta_{\mathbf{k}}(\tau) + ikw_{\mathbf{k}\parallel}(\tau) = 0.} \tag{613}$$

A nouveau, dans la limite  $p \rightarrow 0$  on retrouve bien le résultat de l'hydrodynamique des sphères dures [2]. On remarque que la densité est à présent explicitement couplée à la température (et non plus seulement au champ de vitesse).

### 4.3.2 Impulsion

On a :

$$\begin{aligned}
& \partial_t u_i + u_j \nabla_j u_i + \frac{1}{mn} \nabla_j P_{ij} = -pv_T \xi_{u_i}^{(1)}, \quad P_{ij} = p\delta_{ij} - \eta \left( \nabla_i u_j + \nabla_j u_i - \frac{2}{d} \delta_{ij} \nabla_k u_k \right) \\
\Rightarrow & \partial_t u_i + u_j \nabla_j u_i + \frac{1}{mn} \nabla_i p - \frac{1}{mn} \nabla_j \left[ \eta \left( \nabla_i u_j + \nabla_j u_i - \frac{2}{d} \delta_{ij} \nabla_k u_k \right) \right] = -pv_T \xi_{u_i}^{(1)} \\
\Rightarrow & \partial_t (\underbrace{\delta u_i + u_{iH}}_{=0}) + \underbrace{(\delta u_i + u_{iH}) \nabla_j (\delta u_i + u_{iH})}_{=\mathcal{O}(\delta^2)} + \frac{1}{mn} \nabla_i (nk_B T) \\
& - \frac{1}{mn} \nabla_j \left[ \eta_0 \eta^* \left( \nabla_i \delta u_j + \nabla_j \delta u_i - \frac{2}{d} \delta_{ij} \nabla_k \delta u_k \right) \right] = -pv_T (\delta T + T_H)^{1/2} \xi_{u_i}^{(1)}. \tag{614}
\end{aligned}$$

A nouveau,  $\xi_{u_i}^{(1)}$  a une dépendance fonctionnelle dans les champs hydrodynamiques, qu'il conviendra aussi de linéariser. On a

$$\begin{aligned}
& \partial_t u_i + \frac{k_B}{mn} \nabla_i \underbrace{[(\delta n + n_H)(\delta T + T_H)]}_{=\underbrace{\delta n \delta T + n_H \delta T + T_H \delta n + n_H T_H}_{=\mathcal{O}(\delta^2)}} \\
& - \frac{1}{\underbrace{m(\delta n + n_H)}_{\text{doit être } \mathcal{O}(\delta^0)}} \nabla_j \left[ \eta_0 \eta^* \underbrace{\left( \nabla_i \delta u_j + \nabla_j \delta u_i - \frac{2}{d} \delta_{ij} \nabla_k \delta u_k \right)}_{=\mathcal{O}(\delta)} \right] = -pv_T \xi_{u_i}^{(1)} \\
\Rightarrow & \partial_t \delta u_i + \frac{k_B}{m} \underbrace{\frac{1}{\delta n + n_H}}_{\simeq \frac{1}{n_H} \left( 1 - \frac{\delta n}{n_H} \right)} \nabla_i (n_H \delta T + T_H \delta n) \\
& - \frac{1}{m} \underbrace{\frac{1}{\delta n + n_H}}_{\simeq \frac{1}{n_H} \left( 1 - \frac{\delta n}{n_H} \right)} \nabla_j \left[ \eta_{0H} \eta^* \left( \nabla_i \delta u_j + \nabla_j \delta u_i - \frac{2}{d} \delta_{ij} \nabla_k \delta u_k \right) \right] = -pv_T \xi_{u_i}^{(1)} \\
\Rightarrow & \partial_t \delta u_i + \frac{k_B}{m} \nabla_i \delta T + \frac{k_B}{m} T_H \nabla_i \frac{\delta n}{n_H} - \frac{1}{mn_H} \nabla_j \left[ \eta_{0H} \eta^* \left( \nabla_i \delta u_j + \nabla_j \delta u_i - \frac{2}{d} \delta_{ij} \nabla_k \delta u_k \right) \right] \\
& = -pv_T \xi_{u_i}^{(1)} \\
\Rightarrow & \frac{1}{2} \nu_H \partial_\tau \delta u_i + \frac{k_B}{m} \frac{1}{2} \nu_H \sqrt{\frac{m}{k_B T_H}} \nabla_{l_i} \delta T + \frac{k_B}{m} T_H \frac{1}{2} \nu_H \sqrt{\frac{m}{k_B T_H}} \nabla_{l_i} \frac{\delta n}{n_H} \\
& - \frac{1}{mn_H} \frac{1}{2} \nu_H \sqrt{\frac{m}{k_B T_H}} \nabla_{l_j} \left[ \eta_{0H} \eta^* \frac{1}{2} \nu_H \sqrt{\frac{m}{k_B T_H}} \left( \nabla_{l_i} \delta u_j + \nabla_{l_j} \delta u_i - \frac{2}{d} \delta_{ij} \nabla_{l_k} \delta u_k \right) \right] \\
& = -pv_T \xi_{u_i}^{(1)}. \tag{615}
\end{aligned}$$

Or on a

$$\eta_{0H} \frac{1}{2} \nu_{0H} \sqrt{\frac{m}{k_B T_H}} = \eta_{0H} \frac{1}{2} \frac{p^{(0)}}{\eta_{0H}} \sqrt{\frac{m}{k_B T_H}} = \frac{1}{2} n_{0H} k_B T_H \sqrt{\frac{m}{k_B T_H}} = \frac{1}{2} n_{0H} \sqrt{m k_B T_H}, \tag{616}$$



Utilisant (620) dans (618) il vient :

$$\begin{aligned} \partial_\tau w_{\mathbf{k}i}(\tau) - p w_{\mathbf{k}i}(\tau) \xi_T^{(0)*} + ik_i \theta_{\mathbf{k}}(\tau) + ik_i \rho_{\mathbf{k}}(\tau) \\ - \frac{\eta^*}{2} \sqrt{\frac{m}{k_B T_H}} \int d\mathbf{l} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{l}} \nabla_{l_j} \left( \nabla_{l_i} \delta u_j + \nabla_{l_j} \delta u_i - \frac{2}{d} \delta_{ij} \nabla_{l_k} \delta u_k \right) \\ = \nabla_{l_j} \nabla_{l_i} \delta u_j + \nabla_{l_j} \nabla_{l_j} \delta u_i - \frac{2}{d} \nabla_{l_i} \nabla_{l_j} \delta u_j \\ = -p \sqrt{\frac{m}{k_B T_H}} \frac{2}{\nu_{0H}} \int d\mathbf{l} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{l}} v_T \xi_{u_i}^{(1)}, \end{aligned}$$

avec

$$\nabla_{l_j} \nabla_{l_i} \delta u_j + \nabla_{l_j} \nabla_{l_j} \delta u_i - \frac{2}{d} \nabla_{l_i} \nabla_{l_j} \delta u_j = \underbrace{\left(1 - \frac{2}{d}\right)}_{= \frac{d-2}{d}} \nabla_{l_i} \nabla_{l_j} \delta u_j + \nabla_{l_j} \nabla_{l_j} \delta u_i, \quad (621)$$

ainsi

$$\begin{aligned} \partial_\tau w_{\mathbf{k}i}(\tau) - p \xi_T^{(0)*} w_{\mathbf{k}i}(\tau) + ik_i \theta_{\mathbf{k}}(\tau) + ik_i \rho_{\mathbf{k}}(\tau) \\ - \frac{\eta^*}{2} \sqrt{\frac{m}{k_B T_H}} \int d\mathbf{l} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{l}} \nabla_{l_j} \nabla_{l_j} \delta u_i - \frac{\eta^*}{2} \sqrt{\frac{m}{k_B T_H}} \frac{d-2}{d} \int d\mathbf{l} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{l}} \nabla_{l_i} \nabla_{l_j} \delta u_j \\ \stackrel{\text{parties}}{=} ik_j \int d\mathbf{l} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{l}} \nabla_{l_j} \delta u_i \quad \stackrel{\text{parties}}{=} ik_i \int d\mathbf{l} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{l}} \nabla_{l_j} \delta u_j \\ \stackrel{\text{parties}}{=} i^2 k_j k_j \int d\mathbf{l} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{l}} \delta u_i \quad \stackrel{\text{parties}}{=} i^2 k_i k_j \int d\mathbf{l} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{l}} \delta u_j \\ = -k^2 \delta u_{\mathbf{k}i}(\tau) \quad = -k_i k_j \delta u_{\mathbf{k}j}(\tau) \\ = -p \sqrt{\frac{m}{k_B T_H}} \frac{2}{\nu_{0H}} \int d\mathbf{l} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{l}} v_T \xi_{u_i}^{(1)} \\ \Rightarrow \partial_\tau w_{\mathbf{k}i}(\tau) - p \xi_T^{(0)*} w_{\mathbf{k}i}(\tau) + ik_i \theta_{\mathbf{k}}(\tau) + ik_i \rho_{\mathbf{k}}(\tau) \\ + \frac{\eta^*}{2} k^2 \underbrace{\sqrt{\frac{m}{k_B T_H}} \delta u_{\mathbf{k}i}(\tau)}_{= w_{\mathbf{k}i}(\tau)} + \frac{\eta^*}{2} \frac{d-2}{d} k_i k_j \underbrace{\sqrt{\frac{m}{k_B T_H}} \delta u_{\mathbf{k}j}(\tau)}_{= w_{\mathbf{k}j}(\tau)} \\ = -p \sqrt{\frac{m}{k_B T_H}} \frac{2}{\nu_{0H}} \int d\mathbf{l} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{l}} v_T \xi_{u_i}^{(1)} \\ \Rightarrow \partial_\tau w_{\mathbf{k}i}(\tau) - p \xi_T^{(0)*} w_{\mathbf{k}i}(\tau) + ik_i \theta_{\mathbf{k}}(\tau) + ik_i \rho_{\mathbf{k}}(\tau) + \frac{\eta^*}{2} \left[ k_i k_j w_{\mathbf{k}i}(\tau) + \frac{d-2}{d} k_i k_j w_{\mathbf{k}j}(\tau) \right] \\ = -p \sqrt{\frac{m}{k_B T_H}} \frac{2}{\nu_{0H}} \int d\mathbf{l} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{l}} v_T \xi_{u_i}^{(1)}. \quad (622) \end{aligned}$$

**Lemme 4.1** soit  $\mathbf{w}_{\mathbf{k}\perp}$  la composante du champ de vitesse perpendiculaire à  $\mathbf{k}$ , et  $\mathbf{w}_{\mathbf{k}\parallel}$  sa composante parallèle, alors

$$\hat{\mathbf{e}}_i \left[ k_i k_j w_{\mathbf{k}i}(\tau) + \frac{d-2}{d} k_i k_j w_{\mathbf{k}j}(\tau) \right] = k^2 \mathbf{w}_{\mathbf{k}\perp} + \frac{2(d-1)}{d} k^2 \mathbf{w}_{\mathbf{k}\parallel}. \quad (623)$$

**Preuve.** notons  $\mathbf{k} = k \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}}$ ,  $\mathbf{w}_{\mathbf{k}} = \mathbf{w}_{\mathbf{k}\perp} + \mathbf{w}_{\mathbf{k}\parallel}$ ,  $\mathbf{w}_{\mathbf{k}\parallel} = \mathbf{w}_{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}}$ ,  $\mathbf{w}_{\mathbf{k}\perp} = \mathbf{w}_{\mathbf{k}} - \mathbf{w}_{\mathbf{k}\parallel}$ ,  $|\mathbf{w}_{\mathbf{k}\parallel}| = w_{\mathbf{k}\parallel}$ ,

$|\mathbf{w}_{\mathbf{k}_\perp}| = w_{\mathbf{k}_\perp}$ . On a alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^d \widehat{\mathbf{e}}_i \left[ k_i k_j w_{\mathbf{k}_i}(\tau) + \frac{d-2}{d} k_i k_j w_{\mathbf{k}_j}(\tau) \right] &= \left( \sum_{j=1}^d k_j k_j \right) \left( \sum_{i=1}^d \widehat{\mathbf{e}}_i w_{\mathbf{k}_i}(\tau) \right) \\
&\quad + \frac{d-2}{d} \left( \sum_{i=1}^d \widehat{\mathbf{e}}_i k_i \right) \left( \sum_{j=1}^d k_j w_{\mathbf{k}_j}(\tau) \right) \\
&= k^2 \begin{pmatrix} \mathbf{w}_{\mathbf{k}_\parallel} \\ \mathbf{w}_{\mathbf{k}_\perp} \end{pmatrix} + \frac{d-2}{d} \begin{pmatrix} \mathbf{k} \\ 0 \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} \mathbf{k} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{w}_{\mathbf{k}_\parallel} \\ \mathbf{w}_{\mathbf{k}_\perp} \end{pmatrix} \right] \\
&= k^2 \begin{pmatrix} \mathbf{w}_{\mathbf{k}_\parallel} \\ \mathbf{w}_{\mathbf{k}_\perp} \end{pmatrix} + \frac{d-2}{d} k \widehat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}} (k \widehat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}} \cdot w_{\mathbf{k}_\parallel} \widehat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}}) \\
&= k^2 \begin{pmatrix} \mathbf{w}_{\mathbf{k}_\parallel} \\ \mathbf{w}_{\mathbf{k}_\perp} \end{pmatrix} + \frac{d-2}{d} k^2 \underbrace{w_{\mathbf{k}_\parallel} \widehat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}}}_{= \begin{pmatrix} \mathbf{w}_{\mathbf{k}_\parallel} \\ 0 \end{pmatrix}} \\
&= k^2 \mathbf{w}_{\mathbf{k}_\perp} + \frac{2(d-1)}{d} k^2 \mathbf{w}_{\mathbf{k}_\parallel}. \tag{624}
\end{aligned}$$

■

Utilisant ce lemme, l'Eq. (622) devient

$$\begin{aligned}
&\underbrace{\widehat{\mathbf{e}}_i \left[ \partial_\tau w_{\mathbf{k}_i}(\tau) - p \xi_T^{(0)*} + i k_i \theta_{\mathbf{k}}(\tau) + i k_i \rho_{\mathbf{k}}(\tau) \right]}_{= \mathbf{w}_{\mathbf{k}_\perp} + \mathbf{w}_{\mathbf{k}_\parallel}} + \frac{\eta^*}{2} \left[ k^2 \mathbf{w}_{\mathbf{k}_\perp} + \frac{2(d-1)}{d} \mathbf{w}_{\mathbf{k}_\parallel} \right] \\
&= (\partial_\tau - p \xi_T^{(0)*}) \underbrace{\widehat{\mathbf{e}}_i w_{\mathbf{k}_i}(\tau)}_{= \mathbf{w}_{\mathbf{k}_\perp} + \mathbf{w}_{\mathbf{k}_\parallel}} + i \underbrace{k_i \widehat{\mathbf{e}}_i}_{= k \widehat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}}} \theta_{\mathbf{k}}(\tau) + i \underbrace{k_i \widehat{\mathbf{e}}_i}_{= k \widehat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}}} \rho_{\mathbf{k}}(\tau) \\
&= -p \sqrt{\frac{m}{k_B T_H}} \frac{2}{\nu_{0H}} \widehat{\mathbf{e}}_i \int d\mathbf{l} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{l}} v_T \xi_{u_i}^{(1)} \\
\implies &\left( \partial_\tau - p \xi_T^{(0)*} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{w}_{\mathbf{k}_\parallel} \\ \mathbf{w}_{\mathbf{k}_\perp} \end{pmatrix} + i k [\rho_{\mathbf{k}}(\tau) + \theta_{\mathbf{k}}(\tau)] \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\eta^*}{2} k^2 \begin{pmatrix} \frac{2(d-1)}{d} \mathbf{w}_{\mathbf{k}_\parallel} \\ \mathbf{w}_{\mathbf{k}_\perp} \end{pmatrix} \\
&= -p \sqrt{\frac{m}{k_B T_H}} \frac{2}{\nu_{0H}} \widehat{\mathbf{e}}_i \int d\mathbf{l} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{l}} v_T \xi_{u_i}^{(1)}. \tag{625}
\end{aligned}$$

On remarque déjà que dans la limite  $p \rightarrow 0$  on retrouve le cas particulier élastique [2]. Il reste à traiter le membre de droite de l'Eq. (625). Ainsi :

$$\xi_{u_i}^{(1)} = -v_T \left( \kappa^* \frac{1}{T} \nabla_i T + \mu^* \frac{1}{n} \nabla_i n \right) \underbrace{\frac{(d+2)^2}{32(d-1)} \left( 1 + a_2 \frac{-86 - 101d + 32d^2 + 88d^3 + 28d^4}{32(d+2)} \right)}_{\doteq \xi_{\mathbf{u}}^*} \tag{626}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow v_T \xi_{u_i}^{(1)} &= -v_T^2 \xi_{\mathbf{u}}^* \kappa^* \frac{1}{T} \nabla_i T - v_T^2 \xi_{\mathbf{u}}^* \mu^* \frac{1}{n} \nabla_i n, & v_T &= \sqrt{\frac{2k_B T}{m}} \\
&= -\xi_{\mathbf{u}}^* \kappa^* \frac{2k_B T}{m} \frac{1}{T} \underbrace{\nabla_i (\delta T + T_H)}_{=\mathcal{O}(\delta)} - \xi_{\mathbf{u}}^* \mu^* \frac{2k_B T}{m} \underbrace{\frac{1}{\delta n + n_H}}_{=\frac{1}{n_H} (1 - \frac{\delta n}{n_H} + \mathcal{O}(\delta^2))} \underbrace{\nabla_i (\delta n + n_H)}_{=\mathcal{O}(\delta)} \\
&= -\xi_{\mathbf{u}}^* \kappa^* \frac{2k_B}{m} \nabla_i \delta T - \xi_{\mathbf{u}}^* \mu^* \frac{2k_B T_H}{m n_H} \nabla_i \delta n \\
&= -\xi_{\mathbf{u}}^* \kappa^* \frac{2k_B}{m} \frac{1}{2} \nu_{0H} \sqrt{\frac{m}{k_B T_H}} \nabla_{l_i} \delta T - \xi_{\mathbf{u}}^* \mu^* \frac{2k_B T_H}{m n_H} \frac{1}{2} \nu_{0H} \sqrt{\frac{m}{k_B T_H}} \nabla_{l_i} \delta n. \tag{627}
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
-p \sqrt{\frac{m}{k_B T_H}} \frac{2}{\nu_{0H}} \hat{\mathbf{e}}_i \int d\mathbf{l} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{l}} v_T \xi_{u_i}^{(1)} &= \int d\mathbf{l} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{l}} p \sqrt{\frac{m}{k_B T_H}} \frac{2}{\nu_{0H}} \xi_{\mathbf{u}}^* \frac{2k_B}{m} \frac{1}{2} \nu_{0H} \sqrt{\frac{m}{k_B T_H}} \times \\
&\quad \times \left( \kappa^* \nabla_{l_i} \delta T + T_H \mu^* \nabla_{l_i} \frac{\delta n}{n_H} \right) \hat{\mathbf{e}}_i \\
&= \int d\mathbf{l} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{l}} p \xi_{\mathbf{u}}^* \left( \kappa^* \nabla_{l_i} \delta T + T_H \mu^* \nabla_{l_i} \frac{\delta n}{n_H} \right) \hat{\mathbf{e}}_i \\
&= p \xi_{\mathbf{u}}^* \kappa^* \int d\mathbf{l} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{l}} \nabla_{l_i} \frac{\delta T}{T_H} \hat{\mathbf{e}}_i + p \xi_{\mathbf{u}}^* \mu^* \int d\mathbf{l} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{l}} \nabla_{l_i} \frac{\delta n}{n_H} \hat{\mathbf{e}}_i \\
&= p \xi_{\mathbf{u}}^* \kappa^* i k_i \underbrace{\int d\mathbf{l} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{l}} \frac{\delta T}{T_H} \hat{\mathbf{e}}_i}_{=\theta_{\mathbf{k}}(\tau)} + p \xi_{\mathbf{u}}^* \mu^* i k_i \underbrace{\int d\mathbf{l} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{l}} \frac{\delta n}{n_H} \hat{\mathbf{e}}_i}_{=\rho_{\mathbf{k}}(\tau)} \\
&= p \xi_{\mathbf{u}}^* \kappa^* i k \theta_{\mathbf{k}}(\tau) \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}} + p \xi_{\mathbf{u}}^* \mu^* i k \rho_{\mathbf{k}}(\tau) \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}}. \tag{628}
\end{aligned}$$

Finalement, l'Eq. (628) dans (625) donne

$$\begin{aligned}
&\left( \partial_\tau - p \xi_T^{(0)*} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{w}_{\mathbf{k}_{\parallel}} \\ \mathbf{w}_{\mathbf{k}_{\perp}} \end{pmatrix} + i k [\rho_{\mathbf{k}}(\tau) + \theta_{\mathbf{k}}(\tau)] \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\eta^*}{2} k^2 \begin{pmatrix} \frac{2(d-1)}{d} \mathbf{w}_{\mathbf{k}_{\parallel}} \\ \mathbf{w}_{\mathbf{k}_{\perp}} \end{pmatrix} \\
&= p \xi_{\mathbf{u}}^* i k [\kappa^* \theta_{\mathbf{k}}(\tau) + \mu^* \rho_{\mathbf{k}}(\tau)] \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}} \\ 0 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow &\left( \partial_\tau - p \xi_T^{(0)*} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{w}_{\mathbf{k}_{\parallel}} \\ \mathbf{w}_{\mathbf{k}_{\perp}} \end{pmatrix} + i k [(1 - p \xi_{\mathbf{u}}^* \mu^*) \rho_{\mathbf{k}}(\tau) + (1 - p \xi_{\mathbf{u}}^* \kappa^*) \theta_{\mathbf{k}}(\tau)] \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&+ \frac{\eta^*}{2} k^2 \begin{pmatrix} \frac{2(d-1)}{d} \mathbf{w}_{\mathbf{k}_{\parallel}} \\ \mathbf{w}_{\mathbf{k}_{\perp}} \end{pmatrix} = 0. \tag{629}
\end{aligned}$$

Ceci mène aux deux équations

$$\boxed{
\begin{aligned}
\left( \partial_\tau - p \xi_T^{(0)*} + \frac{d-1}{d} \eta^3 k^2 \right) \mathbf{w}_{\mathbf{k}_{\parallel}} + i k [(1 - p \xi_{\mathbf{u}}^* \mu^*) \rho_{\mathbf{k}}(\tau) + (1 - p \xi_{\mathbf{u}}^* \kappa^*) \theta_{\mathbf{k}}(\tau)] &= 0, \\
\left( \partial_\tau - p \xi_T^{(0)*} + \frac{1}{2} \eta^2 k^2 \right) \mathbf{w}_{\mathbf{k}_{\perp}} &= 0,
\end{aligned}
} \tag{630}$$

avec

$$\xi_{\mathbf{u}}^* = \frac{(d+2)^2}{32(d-1)} \left( 1 + a_2 \frac{-86 - 101d + 32d^2 + 88d^3 + 28d^4}{32(d+2)} \right). \tag{631}$$

Dans la limite  $p \rightarrow 0$ , en dimension  $d = 3$ , on retrouve bien les équations connues du gaz de sphères dures [2].

### 4.3.3 Energie

On a :

$$\begin{aligned}
& \partial_t T + u_i \nabla_i T + \frac{2}{nk_B T} (P_{ij} \nabla_i u_j + \nabla_j q_j) = -p T \xi_T^{(0)} \\
\Rightarrow & \partial_t T + u_i \nabla_i T + \frac{2}{nk_B T} \nabla_i u_j [p \delta_{ij} - \eta (\nabla_i u_j + u_j)] + \frac{2}{nk_B d} \nabla_i [-\kappa \nabla_i T - \mu \nabla_i n] \\
& = -p T \xi_T^{(0)} \\
\Rightarrow & \partial_t T + u_i \nabla_i T + \frac{2}{nk_B d} p \nabla_i u_i - \frac{2}{nk_B d} \nabla_i u_j \left[ \eta \left( \nabla_i u_j + \nabla_j u_i - \frac{2}{d} \delta_{ij} \nabla_k u_k \right) \right] \\
& - \frac{2}{nk_B d} \nabla_i (\kappa \nabla_i T) - \frac{2}{nk_B d} \nabla_i (\mu \nabla_i n) = -p T \xi_T^{(0)}, \tag{632}
\end{aligned}$$

avec  $u_i \rightarrow \delta u_i$ ,  $n \rightarrow \delta n + n_H$ , et  $T \rightarrow \delta T + T_H$  :

$$\begin{aligned}
& \partial_t (\delta T + T_H) + \underbrace{\delta u_i \nabla_i (\delta T + T_H)}_{=\mathcal{O}(\delta^2)} + \underbrace{\frac{2}{nk_B d} nk_B T \nabla_i \delta u_i}_{\text{doit être } \mathcal{O}(\delta^0)} = \mathcal{O}(\delta) \\
& - \underbrace{\frac{2}{nk_B d} \nabla_i \delta u_j \left[ \eta_0 \eta^* \left( \nabla_i \delta u_j + \nabla_j \delta u_i - \frac{2}{d} \delta_{ij} \nabla_k \delta u_k \right) \right]}_{=\mathcal{O}(\delta^1)} - \underbrace{\frac{2}{nk_B d} \nabla_i (\kappa_0 \kappa^* \nabla_i \delta T)}_{\text{doit être } \mathcal{O}(\delta^0)} = \mathcal{O}(\delta) \\
& \underbrace{\hspace{10em}}_{=\mathcal{O}(\delta^2)} \\
& - \underbrace{\frac{2}{nk_B d} \nabla_i \left( \frac{T \kappa_0}{n} \mu^* \nabla_i \delta T \right)}_{\text{doit être } \mathcal{O}(\delta^0)} = -p (\delta T + T_H) \xi_T^{(0)} \\
\Rightarrow & \partial_t \delta T + \partial_t T_H + \frac{2}{d} T_H \nabla_i \delta u_i - \frac{2}{nk_B d} \kappa_0 \kappa^* \nabla_i \nabla_i \delta T - \frac{2}{nk_B d} \frac{T_H \kappa_0}{n_H} \mu^* \nabla_i \nabla_i \delta n \\
& = -p \delta T \xi_T^{(0)} - p T_H \xi_T^{(0)} \\
\Rightarrow & \frac{1}{2} \nu_{0H} \partial_\tau \delta T + \frac{1}{2} \nu_{0H} \partial_\tau T_H + \frac{2}{d} T_H \frac{1}{2} \nu_{0H} \sqrt{\frac{m}{k_B T_H}} \nabla_{l_i} \delta u_i \\
& - \frac{2}{n_H k_B d} \kappa_0 \kappa^* \left( \frac{1}{2} \nu_{0H} \right)^2 \frac{m}{k_B T_H} \nabla_{l_i} \nabla_{l_i} \delta T - \frac{2}{n_H k_B d} \frac{T_H \kappa_0}{n_H} \mu^* \left( \frac{1}{2} \nu_{0H} \right)^2 \frac{m}{k_B T_H} \nabla_{l_i} \nabla_{l_i} \delta n \\
& = -p \delta T \nu_{0H} \xi_T^{(0)*} - p T_H \xi_T^{(0)} \\
\Rightarrow & \partial_\tau \delta T + \partial_\tau T_H + \frac{2}{d} T_H \sqrt{\frac{m}{k_B T_H}} \nabla_{l_i} \delta u_i - \frac{2}{n_H k_B d} \kappa_0 \kappa^* \frac{1}{2} \nu_{0H} \frac{m}{k_B T_H} \nabla_{l_i} \nabla_{l_i} \delta T \\
& - \frac{2}{n_H k_B d} \frac{T_H \kappa_0}{n_H} \mu^* \frac{1}{2} \nu_{0H} \frac{m}{k_B T_H} \nabla_{l_i} \nabla_{l_i} \delta n = -2p \xi_T^{(0)*} \delta T - p T_H \frac{2}{\nu_{0H}} \xi_T^{(0)}. \tag{633}
\end{aligned}$$

En variables de Fourier :

$$\begin{aligned}
& \int d\mathbf{l} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{l}} \partial_\tau \delta T + \int d\mathbf{l} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{l}} \partial_\tau T_H + \frac{2}{d} T_H \sqrt{\frac{m}{k_B T_H}} \underbrace{\int d\mathbf{l} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{l}} \nabla_{l_i} \delta u_i}_{=i k_i \int d\mathbf{l} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{l}} \delta u_i = i k_i \delta u_{\mathbf{k}}(\tau)} \\
& - \frac{2}{n_H k_B d} \kappa_0 \kappa^* \frac{1}{2} \nu_{0H} \frac{m}{k_B T_H} \underbrace{\int d\mathbf{l} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{l}} \nabla_{l_i} \nabla_{l_i} \delta T}_{=i^2 k_i k_i \int d\mathbf{l} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{l}} \delta T = -k^2 \delta T_{\mathbf{k}}(\tau)} \\
& - \frac{2}{n_H k_B d} \frac{T_H \kappa_0}{n_H} \mu^* \frac{1}{2} \nu_{0H} \frac{m}{k_B T_H} \underbrace{\int d\mathbf{l} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{l}} \nabla_{l_i} \nabla_{l_i} \delta n}_{=i^2 k_i k_i \int d\mathbf{l} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{l}} \delta n = -k^2 \delta n_{\mathbf{k}}(\tau)} \\
& = -2p \xi_T^{(0)} \int d\mathbf{l} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{l}} \delta T - 2p \frac{T_H}{\nu_H} \int d\mathbf{l} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{l}} \xi_T^{(0)} \\
\Rightarrow & \partial_\tau \delta T_{\mathbf{k}}(\tau) + \partial_\tau T_H \int d\mathbf{l} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{l}} + \frac{2}{d} T_H i k_i \underbrace{\sqrt{\frac{m}{k_B T_H}} \delta u_{\mathbf{k}}(\tau)}_{=w_{\mathbf{k}}(\tau)} \\
& - \frac{2}{n_H k_B d} \kappa_0 \kappa^* \frac{1}{2} \nu_{0H} \frac{m}{k_B} (-k^2) \underbrace{\frac{\delta T_{\mathbf{k}}(\tau)}{T_H}}_{=\theta_{\mathbf{k}}(\tau)} - \frac{2}{n_H k_B d} T_H \kappa_0 \mu^* \frac{1}{2} \nu_{0H} \frac{m}{k_B T_H} (-k^2) \underbrace{\frac{\delta n_{\mathbf{k}}(\tau)}{n_H}}_{=\rho_{\mathbf{k}}(\tau)} \\
& = -2p \xi_T^{(0)} \delta T_{\mathbf{k}}(\tau) - 2p \frac{T_H}{\nu_H} \int d\mathbf{l} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{l}} \xi_T^{(0)} \\
\Rightarrow & \frac{1}{T_H} \partial_\tau \delta T_{\mathbf{k}}(\tau) + \frac{1}{T_H} \partial_\tau T_H \int d\mathbf{l} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{l}} + \frac{2}{d} i \mathbf{k} \cdot \mathbf{w}_{\mathbf{k}}(\tau) + \frac{\kappa_0 \kappa^* \nu_{0H} m}{n_H k_B^2 d T_H} k^2 \theta_{\mathbf{k}}(\tau) \\
& + \frac{\kappa_0 \mu^* \nu_{0H} m}{n_H k_B^2 d T_H} k^2 \rho_{\mathbf{k}}(\tau) = -2p \xi_T^{(0)} \theta_{\mathbf{k}}(\tau) - \frac{2p}{\nu_H} \int d\mathbf{l} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{l}} \xi_T^{(0)}. \tag{634}
\end{aligned}$$

Avec :

$$\frac{1}{T_H} \partial_\tau T_H = \frac{2}{\nu_{0H}} \frac{1}{T_H} \partial_t T_H = \frac{2}{\nu_{0H}} \frac{1}{T_H} \left( -p T_H \xi_T^{(0)} \right) = -2p \xi_T^{(0)*}, \tag{635}$$

$$\kappa_0 = \frac{d(d+2)}{2(d-1)} \frac{k_B}{m} \eta_0, \quad \nu_{0H} = \frac{p^{(0)}}{\eta_{0H}} = \frac{n_H k_B T_H}{\eta_{0H}}, \tag{636}$$

$$\frac{\kappa_0 \nu_{0H} m}{d n_H k_B^2 T_H} = \frac{d(d+2)}{2(d-1)} \frac{k_B}{m} \eta_{0H} \frac{n_H k_B T_H}{\eta_{0H}} \frac{m}{d n_H k_B^2 T_H} = \frac{d+2}{2(d-1)}, \tag{637}$$

$$\partial_\tau \theta_{\mathbf{k}}(\tau) = \frac{1}{T_H} \partial_\tau \delta T_{\mathbf{k}}(\tau) - \delta T_{\mathbf{k}}(\tau) \frac{1}{T_H^2} \partial_\tau T_H = \frac{1}{T_H} \partial_\tau \delta T_{\mathbf{k}}(\tau) - \theta_{\mathbf{k}}(\tau) \underbrace{\frac{1}{T_H} (-\partial_\tau T_H)}_{\stackrel{(635)}{=} -2p \xi_T^{(0)*}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{T_H} \partial_\tau \delta T_{\mathbf{k}}(\tau) = \partial_\tau \theta_{\mathbf{k}}(\tau) - 2p \xi_T^{(0)*} \theta_{\mathbf{k}}(\tau), \tag{638}$$

l'Eq. (634) devient

$$\begin{aligned}
\partial_\tau \theta_{\mathbf{k}}(\tau) - 2p \xi_T^{(0)*} \int d\mathbf{l} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{l}} + \frac{2}{d} i k w_{\mathbf{k}\parallel} + \frac{d+2}{2(d-1)} k^2 \kappa^* \theta_{\mathbf{k}}(\tau) + \frac{d+2}{2(d-1)} k^2 \mu^* \rho_{\mathbf{k}}(\tau) \\
= -\frac{2p}{\nu_H} \int d\mathbf{l} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{l}} \xi_T^{(0)}. \tag{639}
\end{aligned}$$

Utilisant  $\xi_T^{(0)} = \nu_0 \xi_T^{(0)*}$  il vient :

$$\begin{aligned}
-\frac{2p}{\nu_H} \int d\mathbf{l} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{l}} \xi_T^{(0)} &= -\frac{2p}{\nu_H} \int d\mathbf{l} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{l}} \xi_T^{(0)*} \frac{p^{(0)}}{\eta_0} \\
&= -\frac{2p}{\nu_H} \xi_T^{(0)*} \int d\mathbf{l} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{l}} \underbrace{\frac{8}{d+2} \frac{\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma(d/2)} \frac{\sigma^{d-1}}{\sqrt{mk_B T}}}_{\doteq a} n T^{1/2} \\
&= -\frac{2p}{\nu_H} \xi_T^{(0)*} \underbrace{a n_H T_H^{1/2}}_{=\nu_{0H}} \frac{1}{n_H T_H^{1/2}} \int d\mathbf{l} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{l}} (\delta n + n_H) (\delta T + T_H)^{1/2} \\
&= -2p \xi_T^{(0)*} \frac{1}{n_H T_H^{1/2}} \int d\mathbf{l} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{l}} n_H T_H^{1/2} \left( \frac{\delta n}{n_H} + 1 \right) \underbrace{\left( \frac{\delta T}{T_H} + 1 \right)^{1/2}}_{=1 + \frac{1}{2} \frac{\delta T}{T_H} + \mathcal{O}(\delta^2)} \\
&= -2p \xi_T^{(0)*} \int d\mathbf{l} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{l}} \left[ 1 + \frac{\delta n}{n_H} + \frac{1}{2} \frac{\delta T}{T_H} + \mathcal{O}(\delta^2) \right] \\
&= -2p \xi_T^{(0)*} \int d\mathbf{l} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{l}} - 2p \xi_T^{(0)*} \rho_{\mathbf{k}}(\tau) - p \xi_T^{(0)*} \theta_{\mathbf{k}}(\tau). \tag{640}
\end{aligned}$$

L'Eq. (640) dans (639) donne

$$\begin{aligned}
\partial_\tau \theta_{\mathbf{k}}(\tau) - 2p \xi_T^{(0)*} \int d\mathbf{l} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{l}} + \frac{2}{d} i k w_{\mathbf{k}\parallel} + \frac{d+2}{2(d-1)} k^2 \kappa^* \theta_{\mathbf{k}}(\tau) + \frac{d+2}{2(d-1)} k^2 \mu^* \rho_{\mathbf{k}}(\tau) \\
= -2p \xi_T^{(0)*} \int d\mathbf{l} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{l}} - 2p \xi_T^{(0)*} \rho_{\mathbf{k}}(\tau) - p \xi_T^{(0)*} \theta_{\mathbf{k}}(\tau), \tag{641}
\end{aligned}$$

d'où finalement

$$\boxed{\left[ \partial_\tau + p \xi_T^{(0)*} + \frac{d+2}{2(d-1)} \kappa^* k^2 \right] \theta_{\mathbf{k}}(\tau) + \left[ 2p \xi_T^{(0)*} + \frac{d+2}{2(d-1)} \mu^* k^2 \right] \rho_{\mathbf{k}}(\tau) + \frac{2}{d} i k w_{\mathbf{k}\parallel}(\tau) = 0.} \tag{642}$$

Pour  $p \neq 0$ , la structure formelle de l'équation est exactement la même que celle du gaz de sphères dures [2]. A nouveau, dans la limite  $p \rightarrow 0$  on retrouve le résultat connu [2], sans toutefois les taux de déclin au second ordre que nous avons négligés. Il a été montré que ces taux étaient effectivement négligeables pour le gaz faiblement inélastique [2]. Le seul recouvrement avec notre théorie est la limite élastique, et notre hypothèse est que ces taux restent négligeables au moins pour de faibles probabilités d'annihilation.

#### 4.4 Résolution

En résumé, nous avons établi dans la section précédente

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \tau} + 2p \xi_n^{(0)*} \right] \rho_{\mathbf{k}}(\tau) + p \xi_n^{(0)*} \theta_{\mathbf{k}}(\tau) + i k w_{\mathbf{k}\parallel}(\tau) = 0, \tag{643}$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \tau} - p \xi_T^{(0)*} + \frac{d-1}{d} \eta^* k^2 \right] \mathbf{w}_{\mathbf{k}\parallel} + i \mathbf{k} \left[ (1 - p \xi_u^* \mu^*) \rho_{\mathbf{k}}(\tau) + (1 - p \xi_u^* \kappa^*) \theta_{\mathbf{k}}(\tau) \right] = 0, \tag{644}$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \tau} - p \xi_T^{(0)*} + \frac{1}{2} \eta^* k^2 \right] \mathbf{w}_{\mathbf{k}\perp}(\tau) = 0, \tag{645}$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \tau} + p \xi_T^{(0)*} + \frac{d+2}{2(d-1)} \kappa^* k^2 \right] \theta_{\mathbf{k}}(\tau) + \left[ 2p \xi_T^{(0)*} + \frac{d+2}{2(d-1)} \mu^* k^2 \right] \rho_{\mathbf{k}}(\tau) + \frac{2}{d} i k w_{\mathbf{k}\parallel}(\tau) = 0. \tag{646}$$

On remarque que l'Eq. (645) est découplée des autres, et peut donc être résolue pour la composante transverse du champ de vitesse. Soit

$$s_{\perp}(p, k) = p\xi_T^{(0)*} - \frac{1}{2}\eta^*k^2, \quad (647)$$

alors l'Eq. (645) devient

$$\partial_{\tau}\mathbf{w}_{\mathbf{k}_{\perp}}(\tau) = s_{\perp}\mathbf{w}_{\mathbf{k}_{\perp}}(\tau), \quad (648)$$

dont la solution est

$$\mathbf{w}_{\mathbf{k}_{\perp}}(\tau) = \mathbf{w}_{\mathbf{k}_{\perp}}(0)e^{s_{\perp}\tau}. \quad (649)$$

La composante transverse du champ de vitesse décrit la formation de vortexes si  $s_{\perp} > 0$  [20], c'est-à-dire si  $2p\xi_T^{(0)*}/\eta^* > k^2$ .

Notre formulation est réalisée dans un espace de dimension  $d$ . Par conséquent  $\mathbf{w}_{\mathbf{k}_{\parallel}}$  est dans un espace vectoriel de dimension 1 (engendré par  $\mathbf{k}$ ), et  $\mathbf{w}_{\mathbf{k}_{\perp}}$  dans un espace de dimension  $d-1$ . Ceci identifie donc  $d-1$  modes transverses, donc par analogie avec le gaz granulaire des modes de cisaillement. Il reste donc  $(d+2) - (d-1) = 3$  champs hydrodynamiques à déterminer, c'est-à-dire la densité  $\rho_{\mathbf{k}}$ , la température  $\theta_{\mathbf{k}}$ , et le champ longitudinal des vitesses  $\mathbf{w}_{\mathbf{k}_{\parallel}} = w_{\mathbf{k}_{\parallel}}\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}}$ . Le problème étant linéaire, la solution pour ces champs s'exprime comme combinaison linéaire des fonctions propres du problème aux valeurs propres associé. Notre système s'écrit

$$\begin{pmatrix} \dot{\rho}_{\mathbf{k}} \\ \dot{w}_{\mathbf{k}_{\parallel}} \\ \dot{\theta}_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2p\xi_n^{(0)*} & -ik & -p\xi_n^{(0)*} \\ -ik(1-p\xi_{\mathbf{u}}^*\mu^*) & p\xi_T^{(0)*} - \frac{d-1}{d}\eta^3k^2 & -ik(1-p\xi_{\mathbf{u}}^*\kappa^*) \\ -2p\xi_T^{(0)*} - \frac{d+2}{2(d-1)}\mu^*k^2 & -\frac{2}{d}ik & -p\xi_T^{(0)*} - \frac{d+2}{2(d-1)}\kappa^*k^2 \end{pmatrix}}_{\doteq M} \cdot \begin{pmatrix} \rho_{\mathbf{k}} \\ w_{\mathbf{k}_{\parallel}} \\ \theta_{\mathbf{k}} \end{pmatrix}. \quad (650)$$

Les fonctions propres sont de la forme  $\varphi_n(k) = \exp[s_n(p, k)\tau]$ ,  $n = 1, \dots, 3$ , avec  $s_n$  les valeurs propres de la matrice  $M$ , solution de l'équation cubique  $\det(M - s\mathbb{1}) = 0$ . L'équation caractéristique étant particulièrement longue, on ne l'écrira pas ici. La résolution se fait à l'aide d'outils informatiques, utilisant les expressions explicites de  $\xi_n^{(0)*}$ ,  $\xi_{\mathbf{u}}^*$ ,  $\xi_T^{(0)*}$ ,  $\mu^*$ ,  $\eta^*$ , et  $\kappa^*$ .

## 4.5 Interprétations

Faisons d'abord quelques commentaires sur la validité des hypothèses utilisées pour aboutir à cette description hydrodynamique.

Une hypothèse pour l'applicabilité de Chapman-Enskog est que les variations spatiales des champs sont faibles devant le libre-parcours moyen, c'est-à-dire dans nos variables adimensionnelles que  $k \ll 1$ . Ainsi, les relations de dispersion obtenues ne sont pertinentes que pour  $k$  "proche" de l'origine  $k = 0$ , et les relations de dispersion pour grands  $k$  ne sont plus pertinentes.

Une autre remarque concerne les taux de déclin. Ces derniers décrivent le déclin des champs hydrodynamiques dans une description macroscopique (l'équation de Navier-Stokes en l'occurrence, ou de Burnett, super-Burnett, etc.). Il faut donc qu'il y ait une séparation claire des échelles de temps macroscopiques décrites par ces taux de déclin, et l'échelle microscopique. Cette séparation est par construction même nécessaire dans notre approche pour dériver les équations hydrodynamiques. Elle est nécessaire pour que les champs  $n$ ,  $\mathbf{u}$ , et  $T$  associés à des grandeurs non conservées, puissent être utilisés. Or les taux de déclin ayant les dimensions de l'inverse du temps, on peut leur associer une échelle de temps qui est l'inverse de ces mêmes taux. Par conséquent, si ces taux augmentent, l'échelle de temps associée diminuera. Dans notre problème, on introduit clairement trois telles échelles supposées macroscopiques ; une pour chaque champ hydrodynamique. Il sera donc nécessaire que le plus grand de ces taux définisse un temps macroscopique qui reste beaucoup plus grand que le temps microscopique. Or il est clair que ces taux augmentent en fonction de la probabilité d'annihilation (donc les échelles temporelles associées deviennent plus petites). La question est alors de savoir quand (à partir de quelle valeur de la probabilité d'annihilation  $p$ ) la plus petite échelle de temps

introduite par les taux de déclin est comparable à l'échelle temporelle microscopique. Lorsque tel est le cas, la théorie devient inconsistante et la description hydrodynamique développée n'est plus pertinente : on ne peut plus utiliser les champs  $n$ ,  $\mathbf{u}$ , et  $T$  dans la description. Intuitivement, les échelles de temps induites par les taux de déclin doivent diminuer à mesure que les paramètres contrôlant la dissipation (en l'occurrence  $p$ ) augmentent. Pour le gaz granulaire, le problème se pose de la même façon, à la différence près qu'il n'existe qu'un seul taux de déclin (celui associé à la température). Notant  $\alpha$  le coefficient de restitution, il a donc été observé que la description hydrodynamique du gaz granulaire fournissait de bons résultats pour  $\alpha \in [0.6, 1]$  [20, 4]. On peut donc de même prévoir une borne supérieure  $p_c$  pour la probabilité d'annihilation telle que pour tout  $p > p_c$  la description hydrodynamique n'est plus pertinente car il n'y a alors plus séparation des échelles de temps décrivant la dynamique à l'échelle macroscopique et celle de la dynamique au niveau microscopique. On trouve ainsi  $p_c \simeq 0.2$ . Ceci reste néanmoins un argument qualitatif. Pour répondre à la question de la validité de l'hydrodynamique des systèmes dissipatifs il est nécessaire d'entreprendre une étude quantitative.

La suite de l'analyse de stabilité linéaire est présentée dans l'article issu des résultats contenus dans ce document [1].

## Références

- [1] F. Coppex, M. Droz, and E. Trizac, Phys. Rev. E **70**, 061102 (2004).
- [2] J. J. Brey, J. W. Dufty, C. S. Kim, and A. Santos, Phys. Rev. E **58**, 4638 (1998).
- [3] J. Dufty, e-print : cond-mat/0109215 (2001).
- [4] J. Dufty, e-print : cond-mat/0108444 (2001).
- [5] J. Piasecki, E. Trizac, and M. Droz, Phys. Rev. E **66**, 066111 (2002).
- [6] J. J. Brey, J. W. Dufty, and M. J. Ruiz-Montero, e-print : cond-mat/0302180.
- [7] N. Brilliantov and T. Pöschel, e-print : cond/mat 0301152.
- [8] V. Garzó and J. M. Montanero, Physica A **313**, 336-356 (2002) (e-print : cond-mat/0112241).
- [9] A. Santos, Physica A **321**, 442-466 (2003) (e-print : cond-mat/0204071).
- [10] S. Chapman and T. G. Cowling, *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases*, Cambridge Univ. Press (1990).
- [11] R. Ramírez, D. Risso, R. Soto, and P. Cordero, e-print : cond-mat/0001250.
- [12] V. Garzó and J. W. Dufty, Phys. Rev. E **59**, 5895 (1999).
- [13] J. Ferziger and H. Kaper, *Mathematical Theory of Transport Process in Gases*, North-Holland, Amsterdam (1972).
- [14] J.J. Brey and D. Cubero, in Granular Gases, edited by T. Pöschel and S. Ludwig, *Lecture Notes in Physics*, Springer Verlag, Berlin (2001), p.59.
- [15] F. Coppex, M. Droz, and E. Trizac, Phys. Rev. E **69**, 011303 (2004).
- [16] I. Goldhirsch and G. Zanetti, Phys. Rev. Lett **70**, 1619 (1993) ; I. Goldhirsch, M.L. Tan, and G. Zanetti, J. Sci. Comput. **8**, 1 (1993).
- [17] S. McNamara and W.R. Young, Phys. Rev. E **50**, R28 (1994).
- [18] S. McNamara and W.R. Young, Phys. Rev. E **53**, 5089 (1996).
- [19] J.J. Brey, M.J. Ruiz-Montero, and D. Cubero, Phys. Rev. E **54**, 3664 (1996).
- [20] J.J. Brey, M.J. Ruiz-Montero, and D. Cubero, Phys. Rev. E **60**, 3150 (1999).